I Mühazirə

Proyektiv fəzanın aksiomatik qurulması. Proyektiv koordinat sistemi

Proyektiv həndəsə XIX əsrin birinci yarısında Fransada yaranmışdır. Bu elmin yaranması fransız riyaziyyatçısı Ponselenin (1788-1867) adı ilə bağlıdır.

Tutaq ki, bizə hər hansı K meydanı üzərində $(n+1)$ ölçülü V vektor fəzası verilir. V' ilə fəzanın $V/\{\vec{o}\}$ vektorları çoxluğunu işarə edək. Hər hansı boş olmayan P çoxluğu üçün aşağıdakı iki şərti (aksiomu) ödəyən $f: V \to P$ inikası varsa, onda P çoxluğuna V vektor fəzasının doğurduğu n-ölçülü proyektiv fəza deyilir.

I. $f: V' \to P$ süryektivdir, yəni P çoxluğunun hər bir nöqtəsi müəyyən bir $\vec{x} \in V$ vektorunun obrazıdır.

II. İxtiyari $\vec{x}, \vec{y} \in V'$ vektorları üçün $f(\vec{x}) = f(\vec{y})$ bərabərliyi yalnız və yalnız $\vec{x}$ və $\vec{y}$ vektorları kolleniar olduqda doğrudur.

P çoxluğunun elementlərinə proyektiv fəzanın nöqtələri deyilir və latın əlifbasının baş hərfləri $A, B, C, ..., X, Y, ...$ və s. işarə edilir.

Əgər $f(\vec{x}) = X$ olarsa, deyəcəyik ki, $\vec{x}$ vektoru X nöqtəsini doğurur. II aksiomdan alınır ki, V vektor fəzasının P proyektiv fəzasının eyni bir nöqtəsini doğuran bütün vektorları çoxluğu, sıfır vektoru istisna olmaqla, birölçülü altfəzadır. Kolleniar olmayan vektorlar isə müxtəlif nöqtələri doğururlar.

Bu səbəbdən də K meydanı sıfır xarakteristikalı meydan (sonsuz sayda elementi olan meydan) olduqda, P proyektiv fəzası da sonsuz sayda nöqtəyə malikdir. K meydanı sonlu meydan olduqda isə P proyektiv fəzada da sonlu sayda nöqtə olar.

Şərtləşək ki, bundan sonra biz yalnız R həqiqi ədədlər meydanı üzərində olan V vektor fəzaların doğruluğu proyektiv fəzalara baxacağıq.

Tutaq ki, P üçölçülü proyektiv fəzadır. Onda P fəzasını doğuran V vektor fəzası dördölçülü olacaq.

Dördölçülü V vektor fəzanın üçölçülü L_3 alt vektor fəzasının doğruluğu bütün nöqtələr çoxluğuna P fəzasında proyektiv müstəvi, L_2 alt ikiölçülü fəzasının doğurduğu nöqtələr çoxluğu isə proyektiv düz xətt adlanır. L_1 birölçülü altfəzasının doğurduğu çoxluğun isə nöqtə olduğunu demişdik.

L_2 və L_3 alt vektor fəzalarında cüt –cüt kolleniar olmayan sonsuz sayda vektorlar olduğundan, proyektiv düz xətt və proyektiv müstəvi üzərində sonsuz sayda nöqtə vardır. Üçölçülü proyektiv fəzada bir proyektiv düz xətt üzərində olmayan üç nöqtənin, bir proyektiv müstəvi üzərində olmayan dörd nöqtənin varlığını göstərmək olar.

Doğrudan da, P üçölçülü proyektiv fəzanı doğuran dördölçülü V vektor fəzasında, onun bazisi olan dörd $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ vektorları vardır. Bu vektorların doğruluğu dörd A, B, C və D nöqtələri bir proyektiv müstəvi üzərində deyillər. Bundan başqa onlardan istənilən üç dənəsi bir proyektiv düz xətt üzərində ola bilməzlər.

Bunu isbat edək. Əksini fərz edək. A, B, və C nöqtələri bir proyektiv düz xəttə aiddirlər. Onda bu nöqtələri doğuran $\vec{a}, \vec{b},$ və $\vec{c}$ vektorları ikiölçülü L_2 vektor fəzasına daxildirlər. Bu isə $\vec{a}, \vec{b},$ və $\vec{c}$ vektorlarının xətti asılı olmadıqlarına ziddir.

İsbat edəcəyimiz aşağıdakı xassələr üçölçülü proyektiv fəzanın, proyektiv müstəvinin və proyektiv düz xəttin tərifindən alınır.

Xassə 1. İstənilən iki A və B nöqtələrindən yalnız və yalnız bir proyektiv düz xətt keçir.

İsbatı. Fərz edək ki, $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları A və B nöqtələrini doğururlar. Onda $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları kolleniar ola bilməzlər. Deməli, $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorlarının doğruluğu $L(\vec{a}, \vec{b})$ vektor fəzası ikiölçülü vektor altfəzasıdır. $L(\vec{a}, \vec{b})$ altfəzası müəyyən bir ℓ proyektiv düz xəttini doğurur. A və B nöqtələrininin hər ikisi ℓ proyektiv düz xəttinin üzərində olacaq.

İndi göstərək ki, A və B nöqtələrindən keçən yeganə proyektiv düz xətdir. Əgər ℓ' A və B nöqtələrindən keçən başqa bir düz xətt, L'_2 isə bu düz xətti doğuran altfəza olarsa, onda $\vec{a} \in L'_2$ və $\vec{b} \in L'_2$ olar. Onda $L(\vec{a}, \vec{b})$ və L'_2 altfəzaları üst-üstə düşəcəklər. Deməli, ℓ və ℓ' düz xətləri də üst –üstə düşəcəklər.

Xassə isbat olundu.

Analoji olaraq aşağıdakı xassəni də isbat etmək olar.

Xassə 2. Üçölçülü proyektiv fəzada bir proyektiv düz xətt üzərində olmayan üç nöqtədən yalnız və yalnız bir proyektiv müstəvi keçir**.**

Xassə 3. Əgər iki A və B müxtəlif nöqtələri π proyektiv müstəvisinə aiddirsə, onda bu nöqtələrdən keçən AB düz xətti də π müstəvisinə aiddir.

İsbatı. Fərz edək ki, π proyektiv müstəvisinin doğuranı W üçölçülü vektor fəzasıdır, A və B nöqtələrinin doğuranları isə $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorlarıdır.

$L(\vec{a}, \vec{b})$ ikiölçülü vektor fəzası AB düz xəttinin doğuranı olacaq. $\vec{a} \in W,\ \vec{b} \in W$ olduğundan $L(\vec{a}, \vec{b}) \subset W$ olar. Tutaq ki, M nöqtəsi AB düz xəttinin ixtiyari nöqtəsi, $\vec{m}$ vektoru isə M nöqtəsinin doğuranıdır. $\vec{m} \in L\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$ olduğundan $\vec{m} \in W$ olar. Buradan çıxır ki, $M \in \pi$ olur.

Xassə isbat olundu.

Xassə 4. Bir proyektiv müstəvi üzərində yerləşən iki proyektiv düz xətt kəsişir.

İsbatı. Fərz edək ki, a və b düz xətləri σ müstəvisi üzərində yerləşən ixtiyari iki proyektiv düz xətdirlər. L_2, L_2' və W vektor fəzaları uyğun olaraq bu proyektiv düz xətləri və σ müstəvisini doğuran altfəzalardırlar. $a \subset \sigma$ və $b \subset \sigma$ olduğu üçün $L_2 \subset W$ və $L_2' \subset W$ olar. L_2 və L_2' fəzaları W üçölçülü vektor fəzasının müxtəlif ikiölçülü vektor altfəzaları olduqlarından, cəbrdən məlum olan teoremə əsasən L_2 və L_2' fəzalarının birölçülü ortaq altfəzaları vardır. Həmin birölçülü altfəzanın doğurduğu nöqtə isə a və b proyektiv düz xətlərinin ortaq nöqtəsi olar. Xassə isbat olundu.

Xassə5. Üçölçülü proyektiv fəzada ixtiyari proyektiv müstəvi ilə, onun üzərində yerləşməyən proyektiv düz xəttin yalnız və yalnız bir ortaq nöqtəsi vardır.

Xassə 6. Üçölçülü proyektiv fəzada ixtiyari iki müxtəlif proyektiv müstəvinin, onların ortaq nöqtələrindən ibarət olan yalnız və yalnız bir ortaq düz xətti vardır.

5-ci və 6-cı xassələrin isbatı oxucuya çatdırılır.

Tərif 1. Tutaq ki, $n(n \geq 2)$ ölçülü proyektiv fəzada $B_1, B_2, \ldots, B_k \quad (k \geq 3)$ kimi K nöqtə verilmişdir. Əgər bu nöqtələrin istənilən 3-ü bir proyektiv düz xətt üzərində yerləşmirsə, onda deyirlər ki, $B_1, B_2, \ldots, B_k$ nöqtələri ümumi vəziyyətdədirlər.

Tərif 2. σ proyektiv müstəvisində ümumi vəziyyətdə olan, nizamlanmış $A_1 A_2, A_3, E$ nöqtələri sisteminə proyektiv reper və ya proyektiv müstəvidə proyektiv koordinat sistemi deyilir, $R = (A_1, A_2, A_3, E)$ ilə işarə edilir.

$A_1, A_2, A_3,$ nöqtələrinə reperin təpə nöqtələri, E nöqtəsinə reperin vahid nöqtəsi, $A_1A_2,\ A_2A_3,\ A_1A_3$ düz xətlərinə isə koordinat düz xətləri deyilir.

Əgər reperin təpə nöqtələrini və vahid nöqtəsini doğuran $\vec{a}_1, \vec{a}_2\ \vec{a}_3$ və $\vec{e}$ vektorları $\vec{a}_1, + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 = \vec{e}$ şərtini ödəməklə seçiliblərsə, onda $\vec{a}_1, \vec{a}_2\ \vec{a}_3,\ \vec{e}$

vektorları sisteminə $R=(A_1, A_2, A_{3,} E)$ reperinə nəzərən əlaqəli vektorlar sistemi deyilir.

Göstərək ki, verilmiş reperə nəzərən əlaqəli vektorlar sistemi həmişə vardır. $\vec{b}_1, \vec{b}_2\ \vec{b}_3,\ \vec{e}$ vektorları uyğun olaraq $A_1\ A_2, A_3,$ və E nöqtələrini doğuran vektorlar olsunlar. $A_1\ A_2, A_3,$ nöqtələri bir proyektiv düz xətt üzərində olmadıqlarından, $\vec{b}_1, \vec{b}_2$ və $\vec{b}_3$ vektorları bir ikiölçülü vektor fəzaya aid ola bilməzlər.

Deməli, $\vec{b}_1, \vec{b}_2\ \vec{b}_3$ vektorları komplonar olmadıqlarından, onları σ proyektiv müstəvisini doğuran üçölçülü vektor fəzanın bazis vektorları kimi qəbul edə bilərik. Onda heç olmazsa biri sıfırdan fərqli olan $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ həqiqi ədədləri var ki,

$$\vec{e} = \lambda_1 \vec{b}_1 + \lambda_2 \vec{b}_2 + \lambda_3 \vec{b}_3 \tag{2}$$

$\vec{a}_1 = \lambda_1 \vec{b}_1,\ \vec{a}_2 = \lambda_2 \vec{b}_2,\ \vec{a}_3 = \lambda_3 \vec{b}_3$ vektorları da $A_1\ A_2, A_3,$ nöqtələrini doğururlar.

Beləliklə, biz $A_1\ A_2, A_3, E$ nöqtələrini doğuran və (1) şərtini ödəyən $\vec{a}_1, \vec{a}_2\ \vec{a}_3, \vec{e}$ vektorlar sistemini aldıq.

Əgər λ sıfırdan fərqli hər hansı həqiqi ədəd olarsa, (1) bərabərliyinin hər tərəfini λ-ya vurmaqla

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \lambda_3 \vec{a}_3 = \lambda \vec{e}$$

bərabərliyini alarıq. $\lambda \vec{a}_1, \lambda \vec{a}_2\ \lambda \vec{a}_3,\ \lambda \vec{e}$ vektorları sistemi də R reperinə nəzərən əlaqəli vektorlar sistemi olar. Buradan çıxır ki, verilmiş reperə nəzərən sonsuz sayda əlaqəli vektorlar sistemi vardır.

Teorem 1. Əgər $\vec{a}_1, \vec{a}_2\ \vec{a}_3,\ \vec{e}$ və $\vec{a}'_1, \vec{a}'_2\ \vec{a}'_3,\ \vec{e}'$ vektorlar sisteminin hər biri $R=(A_1, A_2, A_{3,} E)$ reperinə nəzərən əlaqəli vektorlar sistemi isə onda elə $\lambda \neq 0$ həqiqi ədədi var ki,

$$\vec{a}'_1 = \lambda \vec{a}_1,\ \vec{a}'_2 = \lambda \vec{a}_2,\ \vec{a}'_3 = \lambda \vec{a}_3,\ \vec{e}' = \lambda \vec{e} \tag{3}$$

olur.

İsbatı. $\vec{a_1'}$ və $\vec{a_1}$ vektorları eyni bir A_1 nöqtəsini doğurduqlarından elə bir $\lambda_1 \neq 0$ həqiqi ədədi var ki, $\vec{a_1'} = \lambda_1 \vec{a_1}$. Analoji olaraq elə $\lambda_2 \neq 0,\ \lambda_3 \neq 0,\ \lambda_4 \neq 0$ həqiqi ədədləri var ki, $\vec{a_2'} = \lambda_2 \vec{a_2},\ \ \vec{a_3'} = \lambda_3 \vec{a_3},\ \ \vec{e'} = \lambda_4 \vec{e}$.

$\vec{a'_1}, \vec{a'_2}\ \vec{a'_3},\ \vec{e'}$ vektorları R reperinə nəzərən əlaqəli vektorlar sistemi olduqlarından $\vec{a'_1} +, \vec{a'_2} + \vec{a'_3} = \vec{e'}$ bərabərliyindən $\lambda_1 \vec{a_1} + \lambda_2 \vec{a_2} + \lambda_3 \vec{a_3} = \lambda_4 \vec{e}$ bərabərliyini alarıq. Axırıncı bərabərliyin hər tərəfini λ_4 - ə bölsək

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_4}\vec{a_1} + \frac{\lambda_2}{\lambda_4}\vec{a_2} + \frac{\lambda_3}{\lambda_4}\vec{a_3} = \vec{e} \tag{4}$$

alarıq.

$\vec{a_1}, \vec{a_2}\ \vec{a_3}$ vektorları proyektiv müstəvini doğuran üçölçülü vektor fəzanın bazis vektorları olduqlarından,

$\vec{e}$ vektorunun bu bazis vektorların üzrə ayrılışı yeganədir. Onda (4) və (1) bərabərliklərindən alarıq ki,

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_4} = 1,\ \ \frac{\lambda_2}{\lambda_4} = 1,\ \ \frac{\lambda_3}{\lambda_4} = 1,$$

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4$ alınır. Bununla da (3) bərabərliklərinin doğruluğu isbat olundu.

İndi də, proyektiv müstəvi üzərində verilmiş proyektiv koordinat sistemində nöqtənin koordinatı anlayışını verək.

Fərz edək ki, X nöqtəsi proyektiv müstəvinin ixtiyari nöqtəsidir. Bu müstəvi üzərində $R = (A_1,\ A_2,\ A_3,\ E)$ proyektiv reperi verilmişdir. X nöqtəsini doğuran ixtiyari $\vec{x}$ vektoruna və R reperinə nəzərən nəzərən əlaqəli $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3}, \vec{e}$ vektorlar sisteminə baxaq. $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3}$ vektorlarını σ müstəvisini doğuran üçölçülü V vektor fəzasının bazis vektorları qəbul edək. $\vec{x}$ vektorunun bu bazisə üzrə ayrılışını yazaq.

$$\vec{x} = x_1\vec{a_1} + x_2\vec{a_2} + x_3\vec{a_3} \tag{5}$$

Müəyyən nizamla götürülmüş x_1, x_2, x_3 ədədlərinə X nöqtəsinin R reperində proyektiv koordinatları deyilir, $X(x_1, x_2, x_3)$ və ya $X(x_1, x_2, x_3)_R$ kimi işarə edilir. x_1-ə X nöqtəsinin birinci, x_2-yə ikinci, x_3ə isə üçüncü proyektiv koordinatı deyilir. $\vec{x} \neq 0$ olduğundan x_1, x_2 və x_3 koordinatlarının üçü də birdən sıfra bərabər ola bilməz.

Qeyd etmək lazımdır ki, X nöqtəsinin koordinatları bu nöqtəni doğuran $\vec{x}$ vektorunun seçilməsindən və R reperinə nəzərən əlaqəli $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{e}$ vektorlarının seçilməsindən asılıdır. Bu asılılığın xarakterini aydınlaşdıraq. Tutaq ki, $\vec{a}_1^{'}, \vec{a}_2^{'}, \vec{a}_3^{'}, \vec{e}^{'}$ vektorları R reperinə nəzərən başqa əlaqəli vektorlar sistemidir. $\vec{x}^{'}$ isə X nöqtəsini doğuran başqa bir vektordur. $\vec{x}$ və $\vec{x}^{'}$ vektorları eyni bir nöqtəni doğurduqlarından olduqlarından elə $\mu \neq 0$ həqiqi ədədi var ki, $\vec{x}^{'} = \mu \vec{x}$ olur. Bundan qabaq isbat etdiyimiz teoremə görə elə $\lambda \neq 0$ həqiqi ədədi var ki, $\vec{a}_1^{'} = \lambda \vec{a}_1, \vec{a}_2^{'} = \lambda \vec{a}_2, \vec{a}_3^{'} = \lambda \vec{a}_3$

X nöqtəsinin yeni seçilmiş əlaqəli vektorlar sisteminə nəzərən $(x_1^{'}, x_2^{'}, x_3^{'},)$ olsun. Onda

$$\vec{x}^{'} = x_1^{'} \vec{a}_1^{'} + x_2^{'} \vec{a}_2^{'} + x_3^{'} \vec{a}_3^{'}$$

Yuxarıda deyilənləri bu bərabərlikdə nəzərə alsaq alarıq:

$$\mu \vec{x}^{'} = x_1^{'} \lambda \vec{a}_1^{'} + x_2^{'} \lambda \vec{a}_2^{'} + x_3^{'} \lambda \vec{a}_3^{'}$$

Bu bərabərliyin hər tərəfini μ ədədinə bölsək

$$\vec{x} = \frac{\lambda}{\mu} x_1^{'} \vec{a}_1 + \frac{\lambda}{\mu} x_2^{'} \vec{a}_2 + \frac{\lambda}{\mu} x_3^{'} \vec{a}_3 \tag{6}$$

Bu bərabərliyi (5) bərabərliyi tutuşduraq.

$$x_1 = \frac{\lambda}{\mu} x_1^{'}, \quad x_2 = \frac{\lambda}{\mu} x_2^{'}, \quad x_3 = \frac{\lambda}{\mu} x_3^{'}, \quad \frac{\lambda}{\mu} \neq 0$$

alarıq.

Beləliklə, alırıq ki, proyektiv müstəvidə verilmiş proyektiv reperə nəzərən müstəvinin hər bir nöqtəsinin koordinatları sabit vuruq dəqiqliyi ilə təyin edilir.

Yəni əgər (x_1, x_2, x_3) ədədləri (x_1, x_2, x_3) ədədlərinin üçü də birdən sıfır deyil) hər hansı bir nöqtənin $R=(A_1, A_2, A_3, E)$ reperində koordinatlarıdırsa, onda ixtiyari λ_0 ədədi üçün $(\lambda_0 x_1, \lambda_0 x_2, \lambda_0 x_3)$nizamlı ədədləri də həmin nöqtənin $R=(A_1, A_2, A_3, E)$ reperinə nəzərən koordinatları dır.

$R=(A_1, A_2, A_3, E)$ reperinin təpə nöqtələrinin və vahid nöqtəsinin bu reperə nəzərən koordinatları $A_1(1, 0, 0)$, $A_2(0, 1, 0)$, $A_3(0, 0, 1)$, $E(1, 1, 1)$ olar.

II Mühazirə

Nöqtələrin proyektiv koordinatlarının çevrilməsi

Fərz edək ki, σ proyektiv müstəvisində iki $R=(\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3, \mathrm{E})$ və $R'=(\mathrm{A}_1', \mathrm{A}_2', \mathrm{A}_3', \mathrm{E}')$ reperləri verilib və R' reperinin təpə nöqtələrinin və vahid nöqtəsinin R reperinə nəzərən koordinatları məlumdur:

$\mathrm{A}_1'(a_{11}, a_{21}, a_{31})_R$, $\mathrm{A}_2'(a_{12}, a_{22}, a_{32})_R$, $\mathrm{A}_3'(a_{13}, a_{23}, a_{33})_R$ və $\mathrm{E}'(a_{10}, a_{20}, a_{30})_R$.

$$C=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{10} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{20} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{30} \end{pmatrix} \tag{1}$$

matrisinə R reperindən R' reperinə keçid matrisi deyilir. Əgər $\vec{a}_1, \vec{a}_2\ \vec{a}_3, e$ vektorlar sistemi R reperinə nəzərən əlaqəli vektorlar sistemi olarsa, onda

$$\begin{aligned} \vec{a}_1' &= a_{11}\vec{a}_1 + a_{21}\vec{a}_2 + a_{31}\vec{a}_3\ , \\ \vec{a}_2' &= a_{12}\vec{a}_1 + a_{22}\vec{a}_2 + a_{31}\vec{a}_3\ , \\ \vec{a}_3' &= a_{13}\vec{a}_1 + a_{23}\vec{a}_2 + a_{33}\vec{a}_3\ , \\ \vec{e}_1 &= a_{10}\vec{a}_1 + a_{20}\vec{a}_2 + a_{30}\vec{a}_3\ , \end{aligned} \tag{2}$$

vektorları $R^{'}$ reperinin $A_1^{'}, A_2^{'}, A_3^{'}$ təpə nöqtələrini və $E^{'}$ vahid nöqtəsini doğuran vektorlar olacaqlar. (2) bərabərliklərindən alırıq:

$$\vec{a_1^{'}} + \vec{a_2^{'}} + \vec{a_3^{'}} - \vec{e^{'}} = (a_{11} + a_{12} + a_{13} - a_{10})\vec{a}_1 + \\ + (a_{21} + a_{22} + a_{23} - a_{20})\vec{a}_2 + (a_{31} + a_{32} + a_{33} - a_{30})\vec{a}_3 \tag{3}$$

$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ vektorlar σ proyektiv müstəvisini doğuran üçölçülü vektor fəzasında xətti asılı olmayan vektorlar olduqlarından, $\vec{a}_1^{'}, \vec{a}_2^{'}, \vec{a}_3^{'}, \vec{e}^{'}$ vektorlar sistemi $R^{'}$ reperinə nəzərən yalnız və yalnız onda əlaqəli vektorlar sistemi olar ki, (2) matrisinin birinci üç sütununun cəmi onun dördüncü sütununa bərabər olsun. Bu halda (1) matrisinin sütunlarına əlaqəli sütunlar deyəcəyik.

Əgər R reperindən $R^{'}$ reperinə (1) keçid matrisinin sütunları əlaqəli olmazlarsa, onda bu matrisin birinci sütununu k_1 ədədinə, ikinci sütununu k_2 ədədinə üçüncü sütununu k_3 ədədinə vurmaqla onlar

$$\begin{cases} a_{11}k_1 + a_{12}k_2 + a_{13}k_3 = a_{10} \\ a_{21}k_1 + a_{22}k_2 + a_{23}k_3 = a_{20} \\ a_{31}k_1 + a_{32}k_2 + a_{33}k_3 = a_{30} \end{cases} \tag{4}$$

(4) tənliklər sisteminin həlli kimi təyin edə bilərik. Proyektiv koordinat sistemində nöqtənin koordinatları sabit ədədi vuruq dəqiqliyi ilə təyin olunduğundan.

$$\begin{pmatrix} k_1a_{11} & k_2a_{12} & k_3a_{13} & a_{10} \\ k_1a_{21} & k_2a_{22} & k_3a_{23} & a_{20} \\ k_1a_{31} & k_2a_{23} & k_3a_{33} & a_{30} \end{pmatrix} \tag{5}$$

matrisi də R reperindən $R^{'}$ reperinə keçid matrisi olacaq. Bu matrisin sütunları əlaqəlidir.

(4) tənliklər sistemi haqqında onu qeyd edək ki, $A_1^{'}, A_2^{'}, A_3^{'}$ nöqtələri bir düz xətt üzərində olmadıqlarından

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

olar.

Deməli (4) sisteminin yeganə həlli var. Həm də $k_1 \neq 0,\ k_2 \neq 0$ və $k_3 \neq 0$ olar. Çünki əgər məsələn $k_1 = 0$ olarsa, onda E' nöqtəsi $A_2'A_3'$ koordinat düz xətti üzərində olar. Bu isə $R' = (A_1', A_2', A_3', E')$-in reper olması şərtinə ziddir. Eyni qayda ilə $k_2 \neq 0$ və $k_3 \neq 0$. Beləliklə, R reperindən R' reperinə (5) keçid matrisinin sütunları əlaqəlidirlər.

İndi proyektiv müstəvidə müstəvidə koordinatların çevrilməsi məsələsinə keçək.

Məsələ 1. Proyektiv müstəvidə R və R' reperləri, R reperindən R' reperinə sütunları əlaqəli olan (1) keçid matrisi və proyektiv müstəvisinin R və R' reperlərində koordinatları uyğun olaraq (x_1, x_2, x_3) və (x_1', x_2', x_3') olan ixtiyari X nöqtəsi verilmişdir. x_1, x_2, x_3 koordinatlarını x_1', x_2', x_3' koordinatları ilə ifadə etmək tələb olunur.

Həlli. Tutaq ki, $\vec{a}_1, \vec{a}_2\ \vec{a}_3, \vec{e}$ vektorları sistemi R reperinə nəzərən əlaqəli vektorlar sistemidir. Onda (2) bərabərlikləri ilə təyin olunan $\vec{a}_1', \vec{a}_2', \vec{a}_3', \vec{e}'$ vektorları R' reperinin təpə nöqtələrini və vahid nöqtəsini doğuran vektorlardır. (1) keçid matrisinin sütunları əlaqəli olduğundan $\vec{a}_1', \vec{a}_2', \vec{a}_3'$ və $\vec{e}'$ vektorları R' reperinə nəzərən əlaqəli vektorlar sistemi olar.

Fərz edək ki, $\vec{y}$ vektoru X nöqtəsini doğuran hər hansı bir vektordur. (y_1, y_2, y_3) bu vektorun $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ bazisində, (y_1', y_2', y_3') isə $\vec{a}_1', \vec{a}_2', \vec{a}_3'$ bazisində koordinatlarıdır

Onda

$$\begin{aligned} \vec{y} &= y_1 \vec{a}_1 + y_2 \vec{a}_2 + y_3 \vec{a}_3 \\ \vec{y} &= y_1' \vec{a}_1' + y_2' \vec{a}_2' + y_3' \vec{a}_3' \end{aligned} \qquad (6)$$

(2) və (6) bərabərliklərindən alarıq:

$$\begin{aligned}&\vec{y}=y'_1\vec{a}_1+y'_2\vec{a}_2+y'_3\vec{a}_3=y'_1\left(a_{11}\vec{a}_1+a_{21}\vec{a}_2+a_{31}\vec{a}_3\right)+\\&+y'_2\left(a_{12}\vec{a}_1+a_{22}\vec{a}_2+a_{32}\vec{a}_3\right)+y'_3\left(a_{13}\vec{a}_1+a_{23}\vec{a}_2+a_{33}\vec{a}_3\right)=\\&=\left(a_{11}y'_1+a_{12}y'_2+a_{13}y'_3\right)\vec{a}_1+\left(a_{21}y'_1+a_{22}y'_2+a_{23}y'_3\right)\vec{a}_2+\\&+\left(a_{31}y'_1+a_{32}y'_2+a_{33}y'_3\right)\vec{a}_3=y_1\vec{a}_1+y_2\vec{a}_2+y_3\vec{a}_3\end{aligned}\tag{7}$$

Buradan isə alarıq:

$$\begin{aligned}y_1&=a_{11}y'_1+a_{12}y'_2+a_{13}y'_3\\y_2&=a_{21}y'_1+a_{22}y'_2+a_{23}y'_3\\y_3&=a_{31}y'_1+a_{32}y'_2+a_{33}y'_3\end{aligned}\tag{8}$$

(y_1, y_2, y_3) və (x_1, x_2, x_3) X nöqtəsinin R reperində koordinatları olduqlarından elə $\lambda \neq 0$ həqiqi ədədi var ki, $y_1=\lambda x_1,\ y_2=\lambda x_2,\ y_3=\lambda x_3$ olar. (y'_1, y'_2, y'_3) və $(x'_1, x'_2\ x'_3)$ X nöqtəsinin R' reperində də koordinatları olduqlarından elə $\lambda' \neq 0$ həqiqi ədədi var ki, $y'_1=\lambda x'_1,\ y'_2=\lambda x'_2,\ y'_3=\lambda x'_3$ olar. Bu qiymətləri (8) də nəzərə alsaq:

$$\begin{aligned}\lambda x_1&=a_{11}\lambda' x'_1+a_{12}\lambda' x'_2+a_{13}\lambda' x'_3\\\lambda x_2&=a_{21}\lambda' x'_1+a_{22}\lambda' x'_2+a_{23}\lambda' x'_3\\\lambda x_3&=a_{31}\lambda' x'_1+a_{32}\lambda' x'_2+a_{33}\lambda' x'_3\end{aligned}\tag{9}$$

Bu bərabərliklərin hər tərəfini λ'- ə bölsək və $\frac{\lambda}{\lambda'}=\rho$ işarə etsək alarıq.

$$\begin{aligned}\rho x_1&=a_{11}x'_1+a_{12}x'_2+a_{13}x'_3\\\rho x_2&=a_{21}x'_1+a_{22}x'_2+a_{23}x'_3\\\rho x_3&=a_{31}x'_1+a_{32}x'_2+a_{33}x'_3\end{aligned}\tag{10}$$

(10) düsturlarına proyektiv müstəvidə koordinatların çevrilməsi düsturları deyilir. Biz $x_1, x_2,$ və x_3 koordinatlarını sabit vuruq dəqiqliyiilə tapdıq. Bu isə təbiidir, çünki proyektiv reper nöqtənin koordinatlarını sabit vuruq dəqiqliyi ilə təyin edir. (10) düsturlarını bir misal üzərində nəzərdən keçirək.

Misal. Proyektiv müstəvidə R reperindən R' reperinə

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

keçid matrisi verilmişdir. R reperindən R' reperinə keçiddə proyektiv koordinatların çevrilməsi düsturlarını yazın.

Həlli. Göründüyü kimi verilən keçid matrisinin sütunları uyğunlaşmış deyillər. Birinci sütunun elə k_1, ikinci k_2, üçüncü sütunu elə k_3 ədədinə vuraq ki,

$$\begin{cases} k_1 + 2k_2 = 1 \\ k_2 = 1 \\ -k_1 + k_3 = 2 \end{cases}$$

şərti ödənsin. Bu sistemdən $k_1 = -1,\ k_2 = 1$ və $k_3 = 1$ alarıq. Deməli, R reperindən R' reperinə keçid matrisinin sütunları əlaqəlidirlər.

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

R reperindən R' reperinə keçiddə çevirmə düsturları

$$\begin{cases} \rho x_1 = -x_1' + 2x_2' \\ \rho x_2 = \qquad\quad x_2' \\ \rho x_3 = x_1' + \qquad\quad x_3' \end{cases}$$

olar.

İndi proyektiv düz xətt üzərində proyektiv koordinatların çevrilməsi məsələsinə baxaq. Fərz edək ki, $\bar{d}$ proyektiv düz xətt üzərində $R = (A_1,\ A_2,\ E)$ və $R' = (\mathrm{A}_1',\ \mathrm{A}_2',\ ,\ \mathrm{E}')$ reperləri verilir. R' reperinin təpə nöqtələrinin və vahid nöqtəsinin R reperində koordinatları məlumdur.

$$A_1'(a_{11},\ a_{21}),\quad A_2'(a_{12},\ a_{22}),\quad E'(a_{10},\ a_{20})$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{10} \\ a_{21} & a_{22} & a_{20} \end{pmatrix} \qquad (11)$$

matrisi R reperindən $R^{'}$ reperinə keçid matrisi adlanır. Əgər (11) matrisinin birinci iki sütununun elementləri cəmi onun üçüncü sütununa bərabər olarsa, onda bu matrisə sütunları əlaqəli matris deyəcəyik.

Məsələ 2. Proyektiv düz xəttin ixtiyari X nöqtəsinin bu proyektiv düz xətləri R və $R^{'}$ reperlərində koordinatları uyğun olaraq $(x_1,\ x_2)_R$ və $(x_1^{'},\ x_2^{'})_{R^{'}}$ -dir. Əgər R reperindən $R^{'}$ reperinə sütunları əlaqəli olan (7) keçid matrisi verilibsə, x_1 və x_2 koordinatlarını $x_1^{'},\ x_2^{'}$ koordinatları ilə ifadə edin.

Həlli: Əgər $\vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ \vec{e}$ vektorları R reperinə nəzərən vektorlar sistemidirsə, onda

$$\begin{aligned} \vec{a}_1^{'} &= a_{11}\vec{a}_1 + a_{21}\vec{a}_2 \\ \vec{a}_2^{'} &= a_{12}\vec{a}_1 + a_{22}\vec{a}_2 \\ \vec{e}^{'} &= a_{10}\vec{a}_1 + a_{20}\vec{a}_2 \end{aligned} \tag{12}$$

vektorları $R^{'}$ reperinin təpə nöqtələrini və vahid nöqtəsini doğuran vektorlar olacaq. (11) keçid matrisinin sütunları əlaqəli olduqlarından, $\vec{a}_1^{'},\ \vec{a}_2^{'},\ \vec{e}^{'}$ vektorları da $R^{'}$ reperinə nəzərən əlaqəli vektorlar sistemi olar.

Əgər X nöqtəsini doğuran hər hansı $\vec{y}$ vektorunun $\vec{a}_1,\ \vec{a}_2$ və $\vec{a}_1^{'},\ \vec{a}_2^{'}$ bazislərində koordinatları uyğun olaraq $(y_1,\ y_2)$ $(y_1^{'},\ y_2^{'})$ olarsa onda

$$\vec{y} = y_1\vec{a}_1 + y_2\vec{a}_2 \quad \text{və} \quad \vec{y} = y_1^{'}\vec{a}_1^{'} + y_2^{'}\vec{a}_2^{'} \tag{13}$$

(12) və (13) münasibətlərindən isə

$$\begin{aligned} \vec{y} &= y_1^{'}\vec{a}_1^{'} + y_2^{'}\vec{a}_2^{'} = y_1^{'}\left(a_{11}\vec{a}_1 + a_{21}\vec{a}_2\right) + y_2^{'}\left(a_{12}\vec{a}_1 + a_{22}\vec{a}_2\right) = \\ &= \left(a_{11}y_1^{'} + a_{12}y_2^{'}\right)\vec{a}_1 + \left(a_{21}y_1^{'} + a_{22}y_2^{'}\right)\vec{a}_2 = y_1\vec{a}_1 + y_2\vec{a}_2 \end{aligned} \tag{14}$$

alarıq. Burada isə

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}y_1^{'} + a_{12}y_1^{'} \\ y_2 &= a_{21}y_1^{'} + a_{22}y_2^{'} \end{aligned} \tag{15}$$

$(y_1,\ y_2)$ və $(x_1,\ x_2)$ eyni bir R reperində X nöqtəsinin koordinatları olduqlarından $\lambda \neq 0$ həqiqi ədədi var ki, $y_1 = \lambda x_1,\ y_2 = \lambda x_2$ olur. Analoji olaraq elə $\lambda^{'} \neq 0$ həqiqi ədədi var ki, $y_1^{'} = \lambda^{'} x_1^{'},\ y_2^{'} = \lambda^{'} x_2^{'}$. Bu münasibətləri (15) –də nəzərə alsaq.

$$\lambda x_1 = a_{11}\lambda^{'} x_1^{'} + a_{12}\lambda^{'} x_1^{'}$$
$$\lambda x_2 = a_{21}\lambda^{'} x_1^{'} + a_{22}\lambda^{'} x_2^{'}$$

olar.

Bu bərabərliklərin hər tərəfini $\lambda^{'}$ -ə bölüb, $\rho = \frac{\lambda}{\lambda^{'}}$ işarə etsək,

$$\begin{cases} \rho x_1 = a_{11}x_1^{'} + a_{12}x_2^{'} \\ \rho x_2 = a_{21}x_1^{'} + a_{22}x_2^{'} \end{cases} \tag{16}$$

düsturlarını alarıq. (16) düsturlarına proyektiv düz xətt üzərində koordinatların çevrilməsi düsturları deyilir. Proyektiv müstəvidə olduğu kimi, burada da x_1 və x_2 koordinatların təbii olaraq sabit vuruq dəqiqliyi ilə təyin etdik.

III Mühazirə

Düz xəttin tənlikləri. Düz xəttin koordinatları. İkilik Prinsipi.

Biz evklid fəzasında koordinat üsulu haqında bəhs etdiyimiz zaman Φ fiqurunu təyin edən şərtlər, haqqında xüsusi halda Φ fiqurunun tənliyi haqqında danışmışdıq.

Proyektiv fəzada da Φ fiqurunun tənliyi anlayışı analoji qayda ilə verilir.

Verilən reperdə Φ fiqurunun tənliyi elə bir tənliyə deyilir ki, Φ fiqurunun hər bir nöqtəsinin koordinatları bu tənliyi ödəyir, Φ fiquruna aid olmayan istənilən nöqtənin koordinatları bu tənliyi ödəmir.

Proyektiv müstəvidə də evklid müstəvisində olduğu kimi fiqur olaraq əsasən düz xətlərə baxılır. Biz də düz xəttin müxtəlif tənliklərini verəcəyik. Verilən iki nöqtədən keçən düz xəttin tənliyini çıxaraq.

Fərz edək ki, proyektiv müstəvidəki R reperində $\overline{d}$ düz xəttini iki $A(a_1,\ a_2,\ a_3)_R$ və $B(b_1,\ b_2,\ b_3)_R$ nöqtələri koordinatları ilə verilmişdir. $\overline{d}$ düz xəttinin ixtiyari $X(x_1, x_2, x_3)_R$ nöqtəsini götürək. A, B və X nöqtələri bir düz xətt üzərində olduqlarından §4-də 3cü teoremə əsasən

$$\begin{vmatrix} x_1 & a_1 & b_1 \\ x_2 & a_2 & b_2 \\ x_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = 0 \qquad (1)$$

alarıq.

Bu isə $\overline{d}$ düz xəttinin tənliyidir.

A və B müxtəlif nöqtələr olduqlarından

$$\text{ranq}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix} = 2 \qquad (2)$$

Deməli, (1) tənliyi yalnız və yalnız onda ödənər ki, determinatın birinci sütunu, onun ikinci və üçüncü sütunlarının xətti kombinasiyası olsun.

Yəni elə λ və μ (ikisi də birdən sıfra bərabər olmayan) həqiqi ədədləri var ki,

$$\begin{aligned} x_1 &= \lambda a_1 + \mu b_1 \\ x_2 &= \lambda a_2 + \mu b_2 \\ x_3 &= \lambda a_3 + \mu b_3 \end{aligned} \qquad (3)$$

Bu tənliklər proyektiv müstəvidə düz xəttin parametrik tənlikləri adlanırlar. Onların mahiyyəti ondan ibarətdir ki, ikisi də birdən sıfra bərabər olmayan λ və μ ədədləri necə olurlarsa, olsunlar (3) tənliklərindən alınan x_1, x_2, x_3 ədədləri (1) tənliyini ödədiyi üçün koordinatları (x_1, x_2, x_3) olan nöqtə $\overline{d}$ düz xətti üzərindədir.

Tərsinə koordinatları (x_1, x_2, x_3) olan nöqtə $\overline{d}$ düz xətti üzərindədirsə, onda həmişə elə λ və μ həqiqi ədədləri var ki, x_1, x_2, x_3 koordinatları (3) tənlikləri vasitəsi ilə a_1, a_2, a_3 və b_1, b_2, b_3 ədədləri ilə ifdə olunurlar.

(1) tənliyinin sol tərəfindəki determinatı birinci sütun elementlərinə görə açsaq.

$$x_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} + x_1\begin{vmatrix} b_1 & a_1 \\ b_3 & a_3 \end{vmatrix} + x_3\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$$ alarıq.

$$u_1 = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad u_2 = \begin{vmatrix} b_1 & a_1 \\ b_3 & a_3 \end{vmatrix}, \quad u_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$ işarə etsək.

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0 \qquad (4)$$

(2) bərabərliyindən alınır ki, u_1, u_2, u_3 ədədlərindən heç olmazsa biri sıfırdan fərqli olmalıdır. Deməli, ixtiyari proyektiv reperdə düz xətt birdərəcəli bircins tənliklə verilir.

Bunun tərsi də doğrudur:

Teorem 1. Proyektiv müstəvidə birdərəcəli bircins (4) tənliyi ilə verilən fiqur proyektiv düz xətdir.

İsbatı. Fərz edək ki, $u_1 \neq 0$. Onda $P = \left(-u_2,\ u_1,\ 0\right)$ və $Q(-u_2,\ 0,\ u_1)$ nöqtələrinin koordinatları (4) tənliyini ödəyirlər. P və Q nöqtələrindən keçən düz xəttin tənliyini yazaq:

$$\begin{vmatrix} x_1 & -u_2 & -u_3 \\ x_2 & -u_1 & 0 \\ x_3 & 0 & u_1 \end{vmatrix} = 0 \text{ və ya } u_1^2\ x_1 + u_1u_2x_2 + u_1u_3x_3 = 0$$

Axırıncı tənliyin hər tərəfini u_1-ə bölsək, onda

$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$ tənliyini alarıq. Deməli, P və Q nöqtələrindən keçən PQ düz xəttinin tənliyi (4) tənliyi ilə üst-üstə düşür. Teorem isbat olundu.

Fərz edək ki, bizə iki d_1 və d_2 düz xətləri

$$d_1 : u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0 \qquad (5)$$

$$d_2 : \upsilon_1x_1 + \upsilon_2x_2 + \upsilon_3x_3 = 0 \qquad (6)$$

tənlikləri ilə verilmişlər.

Cəbr kursunda bircins tənliklər sisteminin əsas determinatının ranqı haqqında teoremdən birbaşa alınır ki,

Teorem 2. (5) və (6) tənlikləri ilə verilmiş düz xətlər yalnız və yalnız onda üst-üstə düşür ki,

$$\text{ranq}\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ \upsilon_1 & \upsilon_2 & \upsilon_3 \end{pmatrix} = 1$$

olsun. Buradan belə nəticə çıxır:

Nəticə. (5) və (6) tənlikləri ilə verilmiş düz xətlər yalnız və yalnız onda kəsişirlər ki,

$$\text{ranq}\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ \upsilon_1 & \upsilon_2 & \upsilon_3 \end{pmatrix} = 2$$

olsun.

Fərz edək ki, d düz xətti R reperində $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$ tənliyi ilə verilmişdir. Onda u_1, u_2, u_3 ədədlərinə d düz xəttinin R reperində koordinatları deyilir və belə işarə edilir: $d(u_1, u_2, u_3)$ və ya $d(u_1, u_2, u_3)_R$. Yuxarıda qeyd etdiyimiz kimi düz xəttin koordinatlarının üçü də eyni zamanda sıfır ola bilməz. Həm də ki, R reperində düz xəttin koordinatları sabit vuruq dəqiqliyi ilə təyin olunur. Proyektiv müstəvidə $R = (A_1, A_2, A_3, E)$ reprində koordinat düz xətlərinin tənlikləri və koordinatları aşağıdakı kimi olur.

$$\begin{array}{ll} A_1A_2 : x_3 = 0 & \quad A_1A_2(0,\ 0,\ 1) \\ A_1A_3 : x_2 = 0 & \quad A_1A_3(0,\ 1,\ 0) \\ A_2A_3 : x_1 = 0 & \quad A_2A_3(1,\ 0,\ 0) \end{array}$$

Proyektiv müstəvidə ikilik prinsipi proyektiv həndəsənin mühüm anlayışlarından biridir.

Nöqtə və düz xəttin qarşılıqlı aid olmaları münasibətini adətən belə ifadə edirik: «Nöqtə düz xəttin üzərindədir» və ya «düz xətt nöqtədən keçir». Bundan sonra biz bu münasibəti belə ifadə edəcəyik: «Nöqtə düz xəttə aiddir» və ya «düz xətt nöqtəyə aiddir».

Tutaq ki, $\pi^{'}$ çoxluğu π proyektiv müstəvisi üzərində bütün düz xətlər çoxluğudur. π müstəvisində R reperini götürək. Koordinatları ilə verilmiş hər bir $A(a_1,\ a_2,\ a_3)_R \in \pi$ nöqtəsinə R reperində eyni koordinatlara malik $m \in \pi^{'}$ düz xəttini qarşı qoysaq onda müəyyən bir $\varphi : \pi \to \pi^{'}$ inikasını alarıq. Göstərək ki, bu inikas biyeksiyadır. φ inikası $A(a_1,\ a_2,\ a_3)_R$ nöqtəsinə $m(a_1,\ a_2,\ a_3)_R$ düz xəttini qarşı qoyur. Əgər A və B nöqtələri π proyektiv müstəvisinin müxtəlif nöqtələri isə onların koordinatları mütənasib deyillər. Onda onlara qarşı qoyulan m və n düz xətlərinin də koordinatları mütənasib olmadıqlarından, bu düz xətlər onlarda müxtəlif düz xətlərdirlər. Deməli, φ inikası inyeksiyasıdır. Yəni müxtəlif nöqtələrə qarşı müxtəlif düz xətlər qoyulur. φ inikası həm də süryeksiyadır. Çünki, $\pi^{'}$ çoxluğunun hər bir düz xətti eyni koordinatlara malik olan nöqtənin obrazı olacaq. Beləliklə aldıq ki, φ inikası biyeksiyadır, yəni qarşılıqlı birqiymətli uyğynluqdur, $\varphi^{-1} : \pi^{'} \to \pi$ inikası düz xətlər çoxluğundan nöqtələr çoxluğuna biyeksiyadır.

Qeyd etmək lazımdır ki, φ və φ^{-1} inikasları nöqtələr və düz xətlər arasında «aid olmaq» münasibətini saxlayırlar: Yəni əgər $A \in d$ və $a^{'} = \varphi(A)$ isə onda $D^{'} = \varphi^{-1}(d)$ nöqtəsi $a^{'}$ düz xəttinə aid olar, $D^{'} \in a^{'}$. Həqiqətən, A nöqtəsi $(a_1,\ a_2,\ a_3)_R$ koordinatları ilə d düz xətti $(u_1,\ u_2,\ u_3)_R$ koordinatları ilə verilən $A \in d$ olduğundan

$$a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3 = 0 \qquad (1)$$

olar.

φ inikasının tərifinə görə $a^{'}$ düz xəttinin də koordinatları $(a_1,\ a_2,\ a_3)_R$ və $D^{'}$ nöqtəsinində koordinatları $(u_1,\ u_2,\ u_3)$ olar. Yəni $a^{'}(a_1, a_2,\ a_3)$ və $D^{'}(u_1,\ u_2,\ u_3)$ olar. (1) bərabərliyi göstərir ki, $D^{'} \in a^{'}$ olur.

Bu təklifdən istifadə edərək aşağıdakı təklifin doğruluğunu isbat edək.

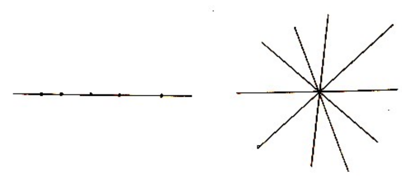
Təklif $A,\ B,\ C$ nöqtələri bir d düz xəttinə aid olarlarsa, onda

$$a = \varphi(A),\ \ b = \varphi(B),\ \ c = \varphi(C)$$

düz xətləri də bir $D = \varphi^{-1}(d)$ nöqtəsinə aid olarlar, başqa sözlə mərkəzi D nöqtəsi olan düz xətlər dəstəsinə aid olarlar.

İsbatı: Yuxarıda qeyd etdiyimizə görə $A \in d$ olduğundan $D \in a,\ B \in d$ olduğundan $D \in b,\ C \in d$ olduğundan $D \in C$ olar. Deməli, a, b, c düz xətləri mərkəzi D nöqtəsi olan düz xətlər dəstəsinə aiddirlər.

Bu təklifdən alınır ki, φ inikasında proyektiv müstəvinin bir düz xəttinə aid nöqtələri çoxluğu bir düz xətlər dəstəsinə keçir.



Şəkil 1

Tərsinə, φ^{-1} inikasında bir nöqtəyə aid düz xətlər dəstəsi bir düz xəttə aid nöqtələr çoxluğuna keçər.

İndi də proyektiv müstəvidə ikilik prinsipini ifadə edək.

İkilik prinsipi (müstəvidə). Əgər proyektiv müstəvidə nöqtələr, düz xətlər və onların qarşılıqlı aid olmaları haqqında hər hansı A təklifi doğrudursa, onda bu təklifdə «düz xətlər» sözünü «nöqtələr» sözü ilə, «nöqtələr» sözünü «düz xətlər» sözü ilə əvəz etdikdə alınan A^* təklifi də doğru olar.

A^* təklifinə A təklifi ilə ikili təklif deyilir. Proyektiv müstəvidə ikilik prinsipini əsaslandırmaq üçün , bu müstəvidə R reperini götürək və yuxarıda olduğu kimi φ və φ^{-1} inikaslarını quraq. Fərz edək ki, proyektiv müstəvinin nöqtələr və düz xətlərdən ibarət hər hansı Φ çoxluğu üçün nöqtə və düz xəttlərin qarşılıqlı aid olmaları haqqında hər hansı A təklifi doğrudur. Φ çoxluğunun φ inikasında bütün nöqtələrinin obrazlarından və φ^{-1} inikasında bütün düz xətlərini obrazlarından ibarət olan Φ^* işarə edək.

A tənliyinə qarşı Φ^* çoxluğuna daxil olan nöqtələr və düz xətlərin qarşılıqlı aid olmaları haqqında A təklifindəki «nöqtələri düz xətlərlə, düz xətləri nöqtələrlə» əvəz etməkdən alınan A^* təklifini qarşı qoyaq. Aidliyi ifadə edən sözləri isə dəyişmədən saxladığımız üçün əgər A təklifi doğru olarsa onda A^* təklifi də doğru olar. Fikrimizi bir neçə misal üzərində aydınlaşdıraq.

Fərz edək ki, A təklifi belədir: 1. «İki nöqtə necə olur olsunlar, bu nöqtələrə aid olan bir düz xətt vardır».

Onda A^* təklifi belə olar. 1^*. «İki düz xətt necə olur olsunlar bu düz xətlərə aid olan ancaq bir nöqtə vardır.»

Həqiqətən A təklifi doğrudur. Onunla ikili olan A^* təklifi də doğrudur.

2. Hər bir düz xəttə aid olan sonsuz sayda nöqtə vardır.

2^*. Hər bir nöqtəyə aid olan sonsuz sayda düz xətt vardır.

3. Bir düz xəttə aid olmayan ən azı üç nöqtə vardır..

3^*. Bir nöqtəyə aid olmayan ən azı üç düz xətt vardır.

İkilik prinsipi bir sıra teoremlərin isbatında istifadə olunur. Həmçinin qeyd etmək lazımdır ki, yuxarıda qurduğumuz φ və φ^{-1} inikasları proyektiv müstəvinin nöqtələri və düz xətləri arasındakı yeganə biyektiv inikaslar deyil. Biz gələcəkdə ikilik prinsipi üçün yararlı olan daha başqa inyektiv inikaslar quracayıq.

İndi də üçölçülü proyektiv fəzada ikilik prinsipi haqqında qısa məlumat verək. Proyektiv fəzada ikilik prinsipi belə ifadə olunur:

İkilik prinsipi (proyektiv fəzada). Əgər proyektiv fəzada nöqtələrin, düz xətlərin və müstəvilərin qarşılıqlı aid olmaları haqqında hər hansı B təklifi doğrudursa, onda bu təklifdə «nöqtələr» sözünü «müstəvilər» sözü ilə, «müstəviləri» sözünü «nöqtlər» sözü ilə əvəz etdikdə, qalan sözləri isə eyni ilə saxladıqda alnan B^* təklifi də doğru olar. Misallar göstərək.

1. Düz xətt və ona aid olmayan nöqtə üçün onların hər ikisinə aid olan yeganə müstəvi vardır.

1*. Düz xətt və ona aid olmayan müstəvi üçün, onların hər ikisinə aid olan yeganə nöqtə vardır.

2. İki nöqtə necə olur-olsun, onlra aid olan ancaq bir düz xətt vardır.

2*. İki müxtəlif müstəvi necə olurlarsa olsunlar, onlara aid olan ancaq bir düz xətt vardır.

IV Mühazirə

Proyektiv həndəsədə ikilik prinsipi. Dezarq teoremi

Proyektiv müstəvidə ikilik prinsipi proyektiv həndəsənin mühüm anlayışlarından biridir.

Nöqtə və düz xəttin qarşılıqlı aid olmaları münasibətini adətən belə ifadə edirik: «Nöqtə düz xəttin üzərindədir» və ya «düz xətt nöqtədən keçir». Bundan sonra biz bu münasibəti belə ifadə edəcəyik: «Nöqtə düz xəttə aiddir» və ya «düz xətt nöqtəyə aiddir».

Tutaq ki, π' çoxluğu π proyektiv müstəvisi üzərində bütün düz xətlər çoxluğudur. π müstəvisində R reperini götürək. Koordinatları ilə verilmiş hər bir $A(a_1,\ a_2,\ a_3)_R \in \pi$ nöqtəsinə R reperində eyni koordinatlara malik $m \in \pi'$ düz xəttini qarşı qoysaq onda müəyyən bir $\varphi : \pi \to \pi'$ inikasını alarıq. Göstərək ki, bu inikas biyeksiyadır. φ inikası $A(a_1,\ a_2,\ a_3)_R$ nöqtəsinə $m(a_1,\ a_2,\ a_3)_R$ düz xəttini qarşı qoyur. Əgər A və B nöqtələri π proyektiv müstəvisinin müxtəlif nöqtələri isə onların koordinatları mütənasib deyillər. Onda onlara qarşı qoyulan m və n düz xətlərinin də koordinatları mütənasib olmadıqlarından, bu düz xətlər onlarda müxtəlif düz xətlərdirlər. Deməli, φ inikası inyeksiyasıdır. Yəni müxtəlif nöqtələrə qarşı müxtəlif düz xətlər qoyulur. φ inikası həm də süryeksiyadır. Çünki, π' çoxluğunun hər bir düz xətti eyni koordinatlara malik olan nöqtənin obrazı olacaq. Beləliklə aldıq ki, φ inikası biyeksiyadır, yəni qarşılıqlı birqiymətli uyğynluqdur, $\varphi^{-1}: \pi' \to \pi$ inikası düz xətlər çoxluğundan nöqtələr çoxluğuna biyeksiyadır.

Qeyd etmək lazımdır ki, φ və φ^{-1} inikasları nöqtələr və düz xətlər arasında «aid olmaq» münasibətini saxlayırlar: Yəni əgər $A \in d$ və $a' = \varphi(A)$ isə onda $D' = \varphi^{-1}(d)$ nöqtəsi a' düz xəttinə aid olar, $D' \in a'$. Həqiqətən, A nöqtəsi $(a_1, a_2, a_3)_R$ koordinatları ilə d düz xətti $(u_1, u_2, u_3)_R$ koordinatları ilə verilən $A \in d$ olduğundan

$$a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3 = 0 \tag{1}$$

olar.

φ inikasının tərifinə görə a' düz xəttinin də koordinatları $(a_1, a_2, a_3)_R$ və D' nöqtəsinində koordinatları (u_1, u_2, u_3) olar. Yəni $a'(a_1, a_2, a_3)$ və $D'(u_1, u_2, u_3)$ olar. (1) bərabərliyi göstərir ki, $D' \in a'$ olur.

Bu təklifdən istifadə edərək aşağıdakı təklifin doğruluğunu isbat edək.

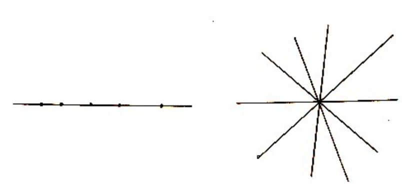
Təklif A, B, C nöqtələri bir d düz xəttinə aid olarlarsa, onda

$$a = \varphi(A), \ b = \varphi(B), \ c = \varphi(C)$$

düz xətləri də bir $D = \varphi^{-1}(d)$ nöqtəsinə aid olarlar, başqa sözlə mərkəzi D nöqtəsi olan düz xətlər dəstəsinə aid olarlar.

İsbatı: Yuxarıda qeyd etdiyimizə görə $A \in d$ olduğundan $D \in a$, $B \in d$ olduğundan $D \in b$, $C \in d$ olduğundan $D \in C$ olar. Deməli, a, b, c düz xətləri mərkəzi D nöqtəsi olan düz xətlər dəstəsinə aiddirlər.

Bu təklifdən alınır ki, φ inikasında proyektiv müstəvinin bir düz xəttinə aid nöqtələri çoxluğu bir düz xətlər dəstəsinə keçir.



Şəkil 1

Tərsinə, φ^{-1} inikasında bir nöqtəyə aid düz xətlər dəstəsi bir düz xəttə aid nöqtələr çoxluğuna keçər.

İndi də proyektiv müstəvidə ikilik prinsipini ifadə edək.

İkilik prinsipi (müstəvidə). Əgər proyektiv müstəvidə nöqtələr, düz xətlər və onların qarşılıqlı aid olmaları haqqında hər hansı A təklifi doğrudursa, onda bu təklifdə «düz xətlər» sözünü «nöqtələr» sözü ilə, «nöqtələr» sözünü «düz xətlər» sözü ilə əvəz etdikdə alınan A^* təklifi də doğru olar.

A^* təklifinə A təklifi ilə ikili təklif deyilir. Proyektiv müstəvidə ikilik prinsipini əsaslandırmaq üçün , bu müstəvidə R reperini götürək və yuxarıda olduğu kimi φ və φ^{-1} inikaslarını quraq. Fərz edək ki, proyektiv müstəvinin nöqtələr və düz xətlərdən ibarət hər hansı Φ çoxluğu üçün nöqtə və düz xəttlərin qarşılıqlı aid olmaları haqqında hər hansı A təklifi doğrudur. Φ çoxluğunun φ inikasında bütün nöqtələrinin obrazlarından və φ^{-1} inikasında bütün düz xətlərini obrazlarından ibarət olan Φ^* işarə edək.

A tənliyinə qarşı Φ^* çoxluğuna daxil olan nöqtələr və düz xətlərin qarşılıqlı aid olmaları haqqında A təklifindəki «nöqtələri düz xətlərlə, düz xətləri nöqtələrlə» əvəz etməkdən alınan A^* təklifini qarşı qoyaq. Aidliyi ifadə edən sözləri isə dəyişmədən saxladığımız üçün əgər A təklifi doğru olarsa onda A^* təklifi də doğru olar. Fikrimizi bir neçə misal üzərində aydınlaşdıraq.

Fərz edək ki, A təklifi belədir: 1. «İki nöqtə necə olur olsunlar, bu nöqtələrə aid olan bir düz xətt vardır».

Onda A^* təklifi belə olar. 1*. «İki düz xətt necə olur olsunlar bu düz xətlərə aid olan ancaq bir nöqtə vardır.»

Həqiqətən A təklifi doğrudur. Onunla ikili olan A^* təklifi də doğrudur.

2. Hər bir düz xəttə aid olan sonsuz sayda nöqtə vardır.

2*. Hər bir nöqtəyə aid olan sonsuz sayda düz xətt vardır.

3. Bir düz xəttə aid olmayan ən azı üç nöqtə vardır..

3*. Bir nöqtəyə aid olmayan ən azı üç düz xətt vardır.

İkilik prinsipi bir sıra teoremlərin isbatında istifadə olunur. Həmçinin qeyd etmək lazımdır ki, yuxarıda qurduğumuz φ və φ^{-1} inikasları proyektiv müstəvinin nöqtələri və düz xətləri arasındakı yeganə biyektiv inikaslar deyil. Biz gələcəkdə ikilik prinsipi üçün yararlı olan daha başqa inyektiv inikaslar quracayıq.

İndi də üçölçülü proyektiv fəzada ikilik prinsipi haqqında qısa məlumat verək. Proyektiv fəzada ikilik prinsipi belə ifadə olunur:

İkilik prinsipi (proyektiv fəzada). Əgər proyektiv fəzada nöqtələrin, düz xətlərin və müstəvilərin qarşılıqlı aid olmaları haqqında hər hansı B təklifi doğrudursa, onda bu təklifdə «nöqtələr» sözünü «müstəvilər» sözü ilə, «müstəviləri» sözünü «nöqtlər» sözü ilə əvəz etdikdə, qalan sözləri isə eyni ilə saxladıqda alnan B^* təklifi də doğru olar. Misallar göstərək.

1. Düz xətt və ona aid olmayan nöqtə üçün onların hər ikisinə aid olan yeganə müstəvi vardır.

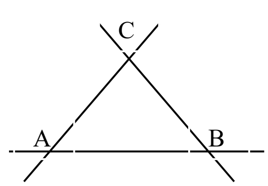
1*. Düz xətt və ona aid olmayan müstəvi üçün, onların hər ikisinə aid olan yeganə nöqtə vardır.

2. İki nöqtə necə olur-olsun, onlra aid olan ancaq bir düz xətt vardır.

2*. İki müxtəlif müstəvi necə olurlarsa olsunlar, onlara aid olan ancaq bir düz xətt vardır.

1. Tərif. Bir proyektiv düz xətt üzərində olmayan üç nöqtədən və bu nöqtələri cüt-cüt birləşdirən üç düz xətdən ibarət olan həndəsi fiqura üçtəpəli deyilir.

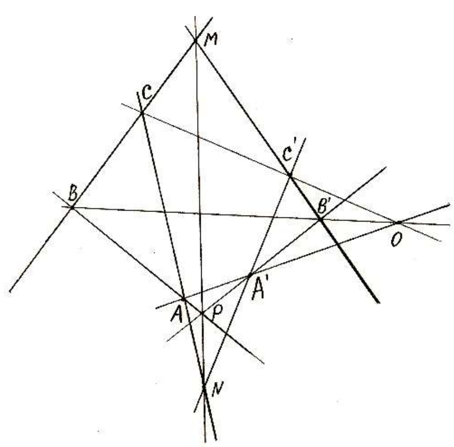
Nöqtələrə üçtəpəlinin təpə nöqtələri, düz xətlərə isə üçtəpəlinin tərəfləri deyilir. Təpələri A, B və C nöqtələri olan üçtəpəlini ABC ilə işarə edəcəyik.



Proyektiv müstəvidə iki ABC və $A'B'C'$ üçtəpəlilərini götürək. Fərz edək ki, bu üçtəpəlilərin təpə nöqtələri yazıldıqları kimi nizamlanmışlar. Onda A və A', B və B', C və C' təpələrinə bu üçtəpəlilərin uyğun təpələri, AB və BC və $B'C'$, AC və $A'C'$ tərəflərinə isə onların uyğun tərəfləri deyəcəyik.

Teorem 1. (Dezarq teoremi). Əgər iki üçtəpəlinin uyğun tərəflərindən keçən düz xətlər bir nöqtədən keçilirsə, (bir nöqtəyə aiddirlərsə), onda bu üçtəpəlilərin uyğun tərəflərinin kəsişmə nöqtələri də bir düz xətt üzərində olar. (bir düz xəttə aid olar).

İsbatı. Fərz edək ki, ABC və $A'B'C'$ verilən üçtəpəlilərdir. O nöqtəsi AA', BB' və CC' düz xətlərinin hər üçnün kəsişdiyi nöqtələrdir. AB və $A'B'$ tərəflərinin kəsişdiyi nöqtəni P ilə, AC və $A'C'$ tərəflərinin kəsişdiyi nöqtəni N ilə BC və $B'C'$ tərəflərinin kəsişdiyi nöqtəni M ilə işarə edək (Şəkil 2).

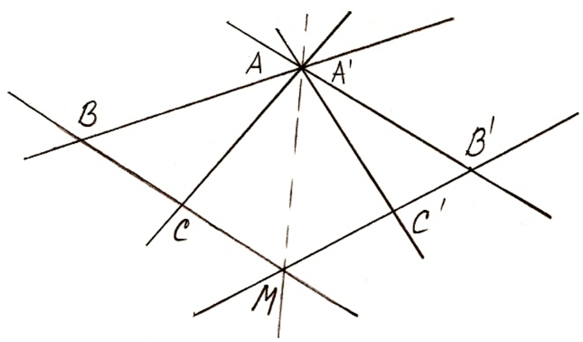


Şəkil 2

Əgər O nöqtəsi AB, BC və ya CA tərəflərinin birinə aid olarsa, onda teoremin hökmünün doğruluğu aşkardır. Beləki əgər $O \in AB$ olarsa, onda $A' \in OA$, $B' \in OB$ və $OA = OB = AB$ olduğundan alarıq ki, $A'B'$ tərəfi ilə AB tərəfi ilə üst-üstə düşər.

AC ilə $A'C'$-in kəsişdiyi nöqtə N, BC ilə $B'C'$-in kəsişdiyi nöqtə M olarsa da MN ilə AB düz xətti, bir P nöqtəsində kəsişər. P nöqtəsi isə AB və $A'B'$ tərəflərinin ortaq nöqtəsidir. Əgər bu üçtəpəlilərin bir cüt uyğun təpə nöqtələri, məsələn A və A', üst-üstə düşərsə yenə teoremini hökmü aşkardır.

Çünki, A nöqtəsi həm AB və $A'B'$ tərəflərinin, həm də AC və $A'C'$ tərəflərinin ortaq nöqtəsi olar, yəni N və P nöqtələri A nöqtəsi ilə üst-üstə düşər (Şəkil 3).



Şəkil 3

Onda AM düz xətti bu üçtəpəlilərin uyğun tərəflərinin kəsişmə nöqtələrinin aid olduğu düz xətt olar.

İndi fərz edək ki, A və A', B və B', C və C' ayrı –ayrı nöqtələrdirlər və O nöqtəsi bu üçtəpəlilərdən heç birinin tərəfinə aid deyil.

Proyektiv müstəvidə $R = (A, B, C, O)$ reperini götürək. Bu reperdə A, B, C, O nöqtələri

$A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 1)$ və $O(1, 1, 1)$

koordinatlarına malikdirlər. OA düz xəttinin tənliyi $x_2 - x_3 = 0$, OB düz xəttinin tənliyi $x_1 - x_3 = 0$.

A' nöqtəsi OA düz xətti üzərində olduğundan onun koordinatları $A'(a, 1, 1)$ kimi, B' nöqtəsi OB düz xətti üzərində olduğundan onun koordinatlarını $B'(1, b, 1)$ kimi, C' nöqtəsi OC düz xətti üzərində olduğundan onun kordinatlarını $C'(1, 1, c)$ kimi götürmək olar. Çünki götürdüyümüz koordinatlar OA, OB, OC düz xətlərinin tənliklərini ödəyirlər.

İndi də R reperində M, N və P nöqtələrinin koordinatlarını tapaq.

P nöqtəsi AB və $A'B'$ düz xətlərinin kəsişmə nöqtəsidir. AB düz xəttinin tənliyi $x_3 = 0$ və $A'B'$ düz xəttinin tənliyi

$$\begin{vmatrix} x_1 & a & 1 \\ x_2 & 1 & b \\ x_3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

olur.

Buradan da $A'B' : (1-b)x_1 - (a-1)x_2 + x_3(ab-1) = 0$ alarıq. $x_3 = 0$ olduğunu nəzərə alsaq, onda P nöqtəsinin koordinatları $P(a-1,\ 1-b,\ 0)$ kimi olar. Analoji qayda ilə $M(0,\ 1-b,\ c-1)$ və $N(a-1,\ 0,\ 1-c)$ alarıq. M, N və P nöqtələri bir düz xətt üzərindədir, çünki,

$$\begin{vmatrix} a-1 & 0 & a-1 \\ 1-b & 1-b & 0 \\ 0 & c-1 & 1-c \end{vmatrix} = 0$$

(Determinatın ikinci və üçüncü sütunlarının cəmi onun birinci sütununu verir) Teorem isbat olundu.

V Mühazirə

Düz xəttin dörd nöqtəsinin və dəstənin dörd düz xəttinin mürəkkəb nisbətləri

Tərif. Tutaq ki, d proyektiv düz xəttinin elə dörd $A,\ B,\ C,\ D$ nöqtələri verilmişdir ki, $A,\ B,\ C$ nöqtələri müxtəlif D isə A nöqtəsi ilə üstə-üstə düşməyən hər hansı nöqtədir. d düz xətti üzərində $R_0 = (A,\ B,\ C)$ reperində D nöqtəsinin koordinatları $(x_1,\ x_2)$ isə, onda $\frac{x_1}{x_2}$ nisbətinə $A,\ B,\ C,\ D$ nöqtələrinin mürəkkəb (ikiqat və ya anharmonik) nisbəti deyilir və $(AB,\ CD)$ kimi işarə olunur.

Qeyd edək ki, D nöqtəsi A ilə üst-üstə düşmədiyindən $R_0 = (A,\ B,\ C)$ reperində $(x_1,\ x_2)$ koordinatları $x_2 \neq 0$ şərtini ödəyir.

Teorem 1. Əgər $A,\ B$ və C proyektiv düz xəttin müxtəlif nöqtələri, λ hər hansı həqiqi ədəd isə, onda d düz xətti üzərində elə yeganə X nöqtəsi var ki, bu nöqtə üçün $(AB,\ CX) = \lambda$.

İsbatı: Proyektiv düz xəttin üzərində $R_0 = (A,\ B,\ C)$ reperini və bu reperdə koordinatları $(\lambda,\ 1)$ olan X nöqtəsini götürək. Tərifə görə $(AB,\ CX) = \lambda$. İndi göstərək ki, teoremin şərtini ödəyən X nöqtəsi yeganədir. Əgər proyektiv düz xəttin üzərində $(AB,\ CX') = \lambda$ şərtini ödəyən başqa bir $X'(x_1,\ x_2)_{R_0}$ nöqtəsi də olarsa, onda $\frac{x_1}{x_2} = \lambda.$ Buradan $\frac{x_1}{x_2} = \frac{\lambda}{1}$ alınır. Deməli, X və X' nöqtələrinin koordinatları mütənasibdirlər. Bu isə o deməkdir ki, X' nöqtəsi X nöqtəsi ilə üst-üstə düşür.

Teorem isbat olundu.

Nəticə. Əgər proyektiv müstəvidə $A,\ B,\ C,\ D$ və D' nöqtələri üçün $(AB,\ CD) = (AB,\ CD')$ şərti ödənərsə, onda D və D' nöqtələri üst-üstə düşürlər.

İndi də mürəkkəb nisbətin verilmiş nöqtələrin koordinatları vasitəsi ilə hesablanması düsturunu verək. Bunun üçün aşağıdakı teoremi isbat edək.

Teorem 2. Əgər proyektiv düz xətt üzərində müəyyən bir R reperində koordinatları ilə verilən

$$A(a_1,\ a_2),\ \ B(b_1,\ b_2),\ \ C(c_1,\ c_2)$$

nöqtələri müxtəlif, $D(d_1,\ d_2)$ nöqtəsi ilə A nöqtəsi ilə üst-üstə düşmürsə, onda

$$(AB,CD)=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} b_1 & d_1 \\ b_2 & d_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_1 & c_2 \end{vmatrix}} \qquad (1)$$

İsbatı. R reperindən $R_0=(A,\ B,\ C)$ reperinə keçid zamanı koordinatları çevrilməsi düsturlarını yazaq. Aydındır ki, ixtiyari $k_1\neq 0,\ k_2\neq 0$ həqiqi ədədləri üçün A və B nöqtələrini koordinatlarını $A(k_1a_1,\ k_1a_2)$ və $B(k_2b_1,\ k_2b_2)$ kimi də yaza bilərik. k_1 və k_2 ədədlərini elə seçək ki,

$\begin{pmatrix} k_1a_1 & k_2b_1 & c_1 \\ k_1a_2 & k_2b_2 & c_2 \end{pmatrix}$ keçid matrisinin sütunları əlaqəli olsunlar. Yəni

$$\begin{cases} k_1a_1+k_2b_1=c_1 \\ k_1a_2+k_2b_2=c_2 \end{cases} \qquad (2)$$

Onda §7-də koordinatların çevrilməsinin (16) düsturları

$$\begin{cases} \rho x_1=k_1a_1x_1'+k_2b_1x_2' \\ \rho x_2=k_1a_2x_1'+k_2b_2x_2' \end{cases} \qquad (3)$$

kimi olar.

Əgər $R_0=(A,\ B,\ C)$ reperində D nöqtəsinin koordinatları $(y_1,\ y_2)$ olarsa, onda (3) düsturlarından alarıq.

$$\begin{cases} \rho d_1=a_1k_1y_1+b_1k_2y_2 \\ \rho d_2=a_2k_1y_1+b_2k_2y_2 \end{cases} \qquad (4)$$

Buradan, y_1 və y_2-ni tapaq.

$$y_1=\frac{\begin{vmatrix} \rho d_1 & b_1k_2 \\ \rho d_2 & b_2k_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1k_1 & b_1k_2 \\ a_2k_1 & b_2k_2 \end{vmatrix}}=\frac{\rho\begin{vmatrix} d_1 & b_1 \\ d_2 & b_2 \end{vmatrix}}{k_1\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}};\quad y_2=\frac{\begin{vmatrix} k_1a_1 & \rho d_1 \\ k_1a_2 & \rho d_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1k_1 & b_1k_2 \\ a_2k_1 & b_2k_2 \end{vmatrix}}=\frac{\rho\begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix}}{k_2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

Mürəkkəb nisbətin tərifinə əsasən

$$(AB,\ CD)=\frac{y_1}{y_2}=\frac{k_2\begin{vmatrix} d_1 & b_1 \\ d_2 & b_2 \end{vmatrix}}{k_1\begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix}} \qquad (5)$$

İndi isə (2) sistemini k_1 və k_2-yə görə həll etsək, alarıq.

$$k_1 = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \qquad k_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

Bu qiymətləri (5) –də yerinə yazsaq

$$(AB,\ CD) = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} d_1 & b_1 \\ d_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_1 & d_1 \\ b_2 & d_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}}$$

Bununla da (1) düsturunu aldıq.

Teorem isbat olundu.

Düz xəttin dörd nöqtəsinin mürəkkəb nisbəti aşağıdakı xassələrə malikdir.

1) $(AB,\ CD) = (CD,\ AB)$

2) $(AB,\ CD) \neq 0$ olarsa, $$(AB,\ CD) = \frac{1}{(AB,\ CD)}, \qquad (BA,\ CD) = \frac{1}{(AB,\ CD)}$$

3) $(AB,\ CD) = (BA,\ DC)$

4) $(AB,\ CC) = 1, \quad (AB,\ CB) = 0$

5) $(AB,\ CD) + (AC,\ BD) = 1$

1), 2) və 3) xassələrini isbat etmək üçün proyektiv düz xətt üzərində ixtiyari reper götürüb, yuxarıdakı nöqtələrin bu reperdə $A(a_1,\ a_2),\ B(b_1,\ b_2),\ C(c_1,\ c_2)$ və $D(d_1,\ d_2)$ koordinatları vasitəsi ilə onların

$$(AB, CD) \quad (CD,\ AB),\ (AB,\ DC),\ (BA,\ CD) \quad (BA,\ DC)$$

mürəkkəb nisbətlərini hesablasaq 1), 2), 3) xassələrinin doğruluğunu alarıq.

4) xassəli mürəkkəb nisbətin tərifindən birbaşa alınır.

5) xassəsini isbat edək. $R_0=(A,\ B,\ C)$ reperində D nöqtəsinin koordinatlarını $(d_1,\ d_2)$ işarə edək. $A,\ B$ və C nöqtələrinin koordinatları uyğun olaraq $(1,\ 0),\ \ (0,\ 1)$ və $(1,\ 1)$ olduğundan alarıq.

$$(AB,\ BD)=\frac{\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}1 & d_1\\ 1 & d_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & d_1\\ 0 & d_2\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix}}=\frac{d_2-d_1}{d_2}=1-\frac{d_1}{d_2}=1-(AB,\ CD)$$

Deməli, $(AB,\ CD)+(AC,\ BD)=1$.

Xassə isbat olundu.

Qeyd etmək lazımdır ki, əgər $A,\ B,\ C,\ D$ nöqtələrini müəyyən ntzamla götürdükdə, onların mürəkkəb nisbəti məlum olarsa, 1) -5) xassələrinin köməyi ilə onların ixtiyari nizamla götürülmüş mürəkkəb nisbətini hesablamaq olur. Fərz edək ki, $(AB,\ \ CD)=\eta\neq 0.$

Onda

$$(AB,\ DC)=\frac{1}{\eta},\quad (BA,\ CD)=\frac{1}{\eta},\quad (BA,\ DC)=\eta,$$
$$(AD,\ BC)=1-(AB,\ DC)=1-\frac{1}{\eta}=\frac{\eta-1}{\eta}$$
və s.

İndi isə genişlənmiş düz xəttin dörd nöqtəsinin mürəkkəb nisbətinin həndəsi mənasını göstərən aşağıdakı teoremi isbat edək.

Teorem 3. Əgər $A,\ B,\ C,\ D$ genişlənmiş düz xəttin məxsusi nöqtələri, P_∞ isə qeyri –məxsusi nöqtəsidirsə, onda

$$(AB,\ CD)=\frac{(AB,\ C)}{(AB,\ \ D)} \tag{6}$$

$$(AB,\ \ CP_\infty)=-(AB,\ C) \tag{7}$$

olar. Burada $(AB,\ C)$ və $(AB,\ D)$ düz xəttin üç nöqtəsinin sadə nisbətidirlər.

İsbatı. Genişlənmiş düz xətdə $\overline{R}=(P_\infty,\ A,\ B)$ reperini götürək. Bu reperdə $P_\infty,\ A,\ B$ nöqtələri ilə $P_\infty(1,\ 0),\ A(0,\ 1),\ B(1,\ 1)$ olar. C və D nöqtələrinin koordinatlarını isə $(c_1,\ c_2)$ və $(d_1,\ d_2)$ ilə işarə edək.

Aydındır ki, $c_2\neq 0,\ \ d_2\neq 0$.

Genişlənmiş düz xəttini məxsusi M_1 və M_2 nöqtələrinin təyin elədiyi M_1M_2 parçasını $\lambda \neq -1$ nisbətində bölən M nöqtəsi üçün $\overrightarrow{M_1M} = \lambda \overrightarrow{MM_2}$ münasibəti ödənir və belə işarə edirlər. $\lambda = (M_1M_2, M)$. Əgər M_1, M_2, M nöqtələrinin $A, \vec{AB}$ afin koordinat sistemində koordinatları uyğun olaraq $x_1,\ x$ və x olarsa, onda

$\overrightarrow{M_1M} = (x - x_1)\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{MM_2} = (x_2 - x)\overrightarrow{AB},$ buna görə

$$(M_1\ M_2,\ M) = \frac{x_1 - x}{x_2 - x} \tag{8}$$

§14-də isbat etdiyimiz teoremə əsasən $\overline{R} = (P_\infty,\ A,\ B)$ reperində koordinatları ilə verilmiş

$$A(0,1),\quad B(1,1),\quad C(c_1, c_2),\quad D(d_1\, d_2)$$

nöqtələri $A, \vec{AB}$ afin reperində $A(0),\ B(1),\ C(c),\ D(d)$ koordinatlarına malikdirlər. Burada $c = \dfrac{c_1}{c_2},\quad d = \dfrac{d_1}{d_2}$

Deməli,

$$(AB,\ C) = \frac{1}{1-c},\qquad (AB,\ D) = \frac{d}{1-d} \tag{9}$$

İndi isə (1) düsturundan istifadə edərək $(AB,\ CD)$ və $(AB,\ CP_\infty)$ mürəkkəb nisbətlərini hesablayaq.

$$(AB,\ CD) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & c_1 \\ 1 & c_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & d_1 \\ 1 & d_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & d_1 \\ 1 & d_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & c_1 \\ 1 & c_2 \end{vmatrix}} = \frac{c_1(d_2 - d_1)}{d_1(c_2 - c_1)} = \frac{\dfrac{c_1}{c_2 - c_1}}{\dfrac{d_1}{d_2 - d_1}} =$$

$$= \frac{\dfrac{c}{1-c}}{\dfrac{d}{1-d}} = \frac{(AB,\ C)}{(AB,\ D)},$$

(6) düsturu isbat olundu.

$$(AB,\ CP_{\infty}) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & c_1 \\ 1 & c_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & c_1 \\ 1 & c_2 \end{vmatrix}} = \frac{c_1}{c_1 - c_2} = \frac{-c}{1-c} = -(AB,\ C)$$

(7) düsturu isbat olundu. Teorem isbat olundu

VI Mühazirə

Proyektiv müstəvidə ikitərtibli xətlər

Tərif. Proyektiv müstəvidə müəyyən bir R reperinə görə koordinatları

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 = 0 \quad (1)$$

tənliyini ödəyən bütün nöqtələr çoxluğuna ikitərtibli xətt deyilir.

Burada fərz olunur ki, a_{ij} $(i,\ j = 1,\ 2,\ 3)$ əmsallarının hamısı birdən sıfra bərabər deyil və $a_{ij} = a_{ji}$. Onda (1) tənliyini qısaca belə yaza bilərik.

$$\sum_{i,\ j=1}^{3} a_{ij}x_i\ x_j = 0 \quad (2)$$

İndi göstərək ki, ikitərtibli xətt anlayışı R reperinin seçilməsindən asılı deyil.

Tutaq ki, (2) tənliyi γ ikitərtibli xəttin $R = (A_1,\ A_2,\ A_3,\ E)$ reperində tənliyidir. Əgər proyektiv müstəvidə başqa bir $R' = (A_1',\ A_2',\ A_3',\ E')$ reperi də verilibsə, onda R repermndən R' reperinə keçid düsturları

$$\rho x_i = b_{i1}x_1' + b_{i2}x_2' + b_i\, x_{i3}' \quad i = 1,\ 2,\ 3 \quad (3)$$

şəklində olar. Bu düsturları (2) –də nəzərə alsaq γ xətti üçün yeni reperdə

$$\sum_{i,\ j}^{3} a_{ij}'x_i'\ x_j' = 0 \quad (4)$$

tənliyi alınar. Burada

$$a_{ij}' = \sum_{k,\ \ell=1}^{3} b_{ki}a_{k\ell}b_{\ell j} \quad (5)$$

(4) tənliyi göstərir ki, γ ikitərtibli xəttinin istənilən reperə görə tənliyinin şəkli eyni olur, yalnız tənlikdə əmsallar (5) qanunu ilə dəyişirlər.

(2) tənliyinin sol tərəfi üçölçülü V vektor fəzasında

$$g\left(\vec{x}\right) = \sum_{i,\,j=1}^{3} a_{ij} x_i x_j \tag{6}$$

kvadratik formasının ifadəsidir. V vektor fəzası proyektiv müstəvini də doğuran fəzadır. A_1, A_2, A_3 nöqtələrinin doğuranları $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3 \in V$ bazis vektorları, A'_1, A'_2, A'_3 nöqtələrinin doğuranları $\vec{a}'_1, \vec{a}'_2, \vec{a}'_3 \in V$ vektorları olsun, $\vec{a}'_1, \vec{a}'_2, \vec{a}'_3$ vektorları $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ bazisinə görə koordinatları ilə $\vec{a}'_1(b_{11}, b_{21}, b_{31}), \vec{a}'_2(b_{12}, b_{22}, b_{32}), \vec{a}'_3(b_{13}, b_{23}, b_{33})$ olarsa, onda

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \tag{7}$$

$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ bazisindən $\vec{a}'_1, \vec{a}'_2, \vec{a}'_3$ bazisinə keçid matrisi olar. (6) kvadratik formasının matrisi

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \tag{8}$$

eyni zamanda (1) ikitərtibli xəttin də matrisi olar. (4) tənliyi ilə verilən ikitərtibli xəttin matrisi

$$A' = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} \end{pmatrix} \tag{9}$$

olarsa, cəbr və həndəsə kurslarından məlum olduğu kimi

$$A' = {}^{t}B \cdot A \cdot B \tag{10}$$

olar. Burada ${}^{t}B$ ilə B matrisinin transponirə olunmuş matrisdir. Yenə cəbr kursundan məlum olduğu kimi $\det B \neq 0$ olduğu üçün

$$ranq A' = ranq A \tag{11}$$

olur.

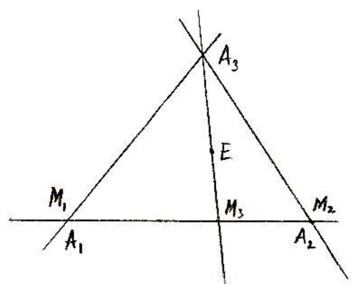
Deməli (4) tənliyi ilə təyin olunan xəttin əmsalları sıfır ola bilməz. İsbat etdik ki, ikitərtibli xətt anlayışı reperin seçilməsindən asılı deyil.

Tərif. A matrisinin ranqına (1) tənliyi ilə verilən γ ikitərtibli xəttin ranqı deyilir.

Ranqı 3-ə bərabər olan ikitərtibli xətlərə cırlaşmayan, ranqı 3-dən kiçik olan ikitərtibli xətlərə cırlaşan ikitərtibli xətlər deyilir.

Yuxarıda gördük ki, bir reperdən digərinə keçdikdə ikitərtibli xəttin ranqı dəyişmir. Aşağıdakı lemmanı isbat edək.

Lemma. Proyektiv müstəvidə ixtiyari düz xətt cırlaşmayan ikitərtibli xətti ən çoxu iki nöqtədə kəsə bilər.



Şəkil 1

İsbatı. Lemmanın əksini fərz etmək üsulu ilə isbat edək. d düz xətti cırlaşmayan γ xəttini üç M_1, M_2 və M_3 nöqtələrində kəsir. Proyektiv müstəvidə elə $R=(A_1, A_2, A_3, E)$ reperini elə seçək ki, A_1 nöqtəsi M_1 ilə, A_2 nöqtəsi M_2 ilə üst –üstə düşsün. A_3 nöqtəsini isə elə götürək ki, M_3 nöqtəsi A_3E düz xətti ilə A_1A_2 düz xəttinin kəsişmə nöqtəsi olsun. Bu reperə görə M_1, M_2, M_3 nöqtələri koordinatları ilə $M_1(1,\ 0,\ 0)$, $M_2(0,\ 1,\ 0)$, $M_3(1,\ 1,\ 0)$ olacaqdır. Nöqtələrin koordinatlarını γ xəttinin

$$\sum_{i,j}^{n} a_{i,j} x_i x_j = 0$$

tənliyində yerinə yazsaq, alarıq ki,

$$a_{11} = a_{12} = a_{22} = a_{21} = 0$$

Bu isə o deməkdir ki, $\det A = 0$

Yəni γ xətti cırlaşandır. Bu isə lemmanın şərtinə ziddir.

Lemma isbat olundu.

Yuxarıda da qeyd etdiyimiz kimi ikitərtibli xətt anlayışı və onun ranqı reperin seçilməsindən asılı deyil. Beləliklə aşağıdakı teoremi isbat etdik.

Teorem: İxtiyari proyektiv çevirmədə ikitərtibli xəttin ranqı dəyişmir, yəni ikitərtibli xətt ranqı onun ranqına bərabər olan ikitərtibli xəttə keçir.

İndi isə ikitərtibli xətlərin proyektiv təsnifatını verək. Cəbr və həndəsə kurslarından məlumdur ki, üçölçülü V vektor fəzasında elə $\vec{a}_1', \vec{a}_2', \vec{a}_3'$ bazisi var ki, γ xəttinin

$$\sum_{i,j=1}^{3} a_{i,j} x_i x_j = 0 \tag{2}$$

tənliyinin sol tərəfindəki

$$g\left(\vec{x}\right) = \sum_{i,j=1}^{3} \vec{a}_{i,j}\, x_i x_j \tag{6}$$

kvadratik forması

$$g\left(\vec{x}\right) = \varepsilon_1 (x_1')^2 + \varepsilon_2 (x_2')^2 + \varepsilon_3 (x_3')^2 \tag{12}$$

şəklində olur. Burada $\varepsilon_i = \pm 1, \; i = 1, 2, 3$

Əgər proyektiv müstəvidə $\vec{a}_1', \vec{a}_2', \vec{a}_3', \vec{e} = \vec{a}_1' + \vec{a}_2' + \vec{a}_1' \in V$ vektorlarının doğuruluğu A_1', A_2', A_3', E' nöqtələrindən ibarət $R' = \left(A_1', A_2', A_3', E'\right)$ reperini seçsək, (1) tənliyi

$$\varepsilon_1 y_1^2 + \varepsilon_2 y_2^2 + \varepsilon_3 y_3^2 = 0 \tag{13}$$

şəklinə düşər. $\left(\varepsilon_i = \pm 1, \; i = 1, 2, 3\right)$

γ xəttinin r ranqının qiymətindən asılı olaraq aşağıdakı hallar mümkündür.

I. $r = 3$. Bu halda γ xəttinin tənliyi aşağıdakı iki tipdən biri ola bilər.

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0 \tag{14}$$

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0 \tag{15}$$

(14) tənliyi ödəyən heç bir həqiqi nöqtə yoxdur. Bu səbəbdən də ona ikitərtibli sıfır xətt deyilir. (15) tənliyi ilə verilən xəttə isə ikitərtibli oval xətt deyilir.

II. $r=2$. Bu halda γ xəttinin tənliyi aşağıdakı iki şəkildən birində ola bilər.

$$x_1^2+x_2^2=0 \tag{16}$$

$$x_1^2-x_2^2=0 \tag{17}$$

(16) tənliyi ilə verilən ikitərtibli xətt $x+ix_2=0$ və $x-ix_2=0$ kimi iki xəyali düz xəttə parçalanan xətt olur. Bu iki xətt $(0,\ 0,\ 1)$ həqiqi nöqtədə kəsişirlər.

(17) tənliyi ilə verilən xətt isə $x+x_2=0,\ x-x_2=0$ kimi iki həqiqi düz xəttə parçalanan xətdir.

III. $r=1$. Bu halda γ xəttinin tənliyi

$$x_1^2=0 \tag{18}$$

şəklində olur. Bu halda ikitərtibli xətt $x_1=0,\ x_2=0$ kimi iki üst-üstə düşən xəttə parçalanan xətt olur. (14), (15), (16), (17), (18) şəklində olan tənliklərə ikitərtibli xəttin kanonik tənlikləri deyilir.

Deməli, proyektiv müstəvidə ancaq beş tip ikitərtibli xətt vardır. Onları aşağıdakı cədvəldə verək.

	Xəttin adı	Xəttin kanonik tənliyi	Xətti ranqı
1.	Oval xətt	$x_1^2+x_2^2-x_3^2=0$	3
2.	Sıfır xətt	$x_1^2+x_2^2+x_3^2=0$	3
3.	İki həqiqi düz xətt	$x_1^2-x_2^2=0$	2
4.	İki xəyali düz xətt	$x_1^2+x_2^2=0$	2
5.	İki üst-üstə düşən düz xətt	$x_1^2=0$	1

Mühazirə 7

Topoloji fəzanın bazası, ona dair teorem

Tutaq ki, X çoxluğunda müəyyən qayda ilə aşağıdakı xassələrə malik olan τ alt çoxluqlar sistemi seçilmişdir:

I. $\varnothing$ boş çoxluğu və X çoxluğunun özü τ sisteminə daxildirlər.

II. τ sistemindən olan alt çoxluqların istənilən ailəsinin birləşməsi τ sisteminə daxildir.

III. τ sistemindən olan alt çoxluqların istənilən sonlu ailəsinin kəsişməsi τ sisteminə daxildir.

Bu halda deyirlər ki, X çoxluğu üzərində *topoloji struktur* (və ya *topologiya*) təyin olunmuşdur. (X,τ) cütünü isə *topoloji fəza* adlandırırlar. I,II,III xassələrinə *topoloji struktur aksiomları* deyilir.

X çoxluğunun elementləri (X,τ) topoloji fəzasının *nöqtələri*, τ sistemindən olan elementlər isə bu fəzanın *açıq çoxluqları* adlanır. Əgər X çoxluğu üzərində hansı τ topologiyasının seçildiyi artıq məlumdursa, onda (X,τ) topoloji fəzasını X ilə də işarə edirlər.

Topoloji fəzalara dair nümunələrə baxaq.

Misal 1. (X,ρ) metrik fəzasını nəzərdən keçirək. IV mühazirədə verilən teorem 2-dən müəyyən edirik ki, (X,ρ) metrik fəzası topoloji fəzadır. Bu topoloji fəzanın τ topologiyası açıq kürələrin köməyi ilə verilir (IV mühazirədə, bənd 2-də (X,ρ) fəzasında açıq çoxluğun tərifinə baxın) və ρ metrikasının *doğurduğu* topologiya adlanır.

Misal 2. R^n arifmetik fəzasında açıq çoxluq anlayışını bu şəkildə daxil etmək olar. n sayda $\left(a^i,b^i\right)(i=1,2,...,n)$ intervallarını götürək. $a^i<x^i<b^i \ (i=1,2,...,n)$ şərtini ödəyən bütün $M\left(x^1,x^2,...,x^n\right)$ nöqtələri çoxluğunu açıq koordinat paralelepipedi adlandıraq.

Əgər $F\subset R^n$ çoxluğu hər bir nöqtəsi ilə bərabər öu nöqtəni özündə saxlayan müəyyən açıq koordinat parale-lepipedini də özündə saxlayırsa, onda bu çoxluğu açıq çoxluq adlandırırıq. $\varnothing$ çoxluğu açıq çoxluq qəbul edirik. Asanlıqla yoxlamaq olur ki, bu qayda ilə təyin edilən bütün açıq çoxluqlar ailəsi topoloji strukturun I,II və III aksiomlarını ödəyir və deməli, R^n çoxluğu üzərində müəyyən topologiya təyin edir. Bu topologiyanı *təbii topologiya* adlandırırlar. Təbii topologiya R^n çoxluğunu topoloji fəzaya çevirir. Bu topoloji fəza *ədədi fəza* ($n = 1$ olduqda *ədəd düz xətti*) adlanır.

Misal 3. A_2 afin müstəvisində $ABCD = P$ paraleloqra-mına baxaq. $\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AD}, 0 < \alpha < 1, \quad 0 < \beta < 1$ şərtini ödəyən bütün M nöqtələrinin $\overset{\circ}{P}$ çoxluğu P paraleloqramının daxili hissəsi adlanır. Əgər $F \subset A_2$ çoxluğunu hər bir nöqtəsi ilə bərabər bu nöqtəni özündə saxlayan müəyyən paraleloqramın daxili hissəsini də özündə saxlayırsa, onda bu çoxluğu açıq çoxluq adlandıraq. Tərifə görə hər bir $M \in F$ nöqtəsi üçün elə P parale-loqramı vardır ki, onun $\overset{\circ}{P}$ daxili hissəsi $M \in \overset{\circ}{P} \subset F$ şərtini ödəyir.

Yoxlamaq olur ki, bu qayda ilə A_2 müstəvisində təyin edilən açıq çoxluqların τ ailəsi topoloji strukturun I,II və III aksiomlarını ödəyir. Beləliklə, afin müstəvi topoloji fəzadır. Eyni qayda ilə göstərmək olar ki, A_n afin fəzası topoloji fəzadır.

Misal 4. İxtiyari X çoxluğunda bu X çoxluğunun özündən və $\varnothing$ boş çoxluğundan ibarət olan $\tau = \{X, \varnothing\}$ ailəsinə baxaq. Aşkardır ki, alt çoxluqların τ ailəsi I,II və III aksiom-larını ödəyir, yəni τ - X çoxluğunda təyin edilmiş topologiyadır. Bu topologiya *antidiskret* (və ya *trivial*) *topologiya*, (X, τ) fəzası isə *antidiskret topoloji fəza* adlanır.

Misal 5. Tutaq ki, X -ixtiyari çoxluqdur, $\tau = P(X)$ isə X çoxluğunun bütün alt çoxluqları ailəsidir. I, II,III aksiom-larının ödənilməsi aşkardır. Bu topologiya *diskret topologiya*, (X, τ) fəzası isə *diskret topoloji fəza* adlanır.

4,5 misalları göstərirlər ki, istənilən X çoxluğunu topo-loji fəzaya çevirmək olar.

2. Tutaq ki, (X,τ) -topoloji fəzadır. X topoloji fəza-sında açıq çoxluqların tamamlayıcılarına *qapalı çoxluqlar* deyilir. Aşkardır ki, X topoloji fəzasında qapalı çoxluqlar üçün aşağıdakı ikili xassələr doğrudur:

I'. $\varnothing$ boş çoxluğu və X çoxluğunun özü qapalı çoxluqlardır.

II'. Qapalı çoxluqların ixtiyari ailəsinin kəsişməsi qapalı çoxluqdur.

III'. Qapalı çoxluqların ixtiyari sonlu ailəsinin birləşməsi qapalı çoxluqdur.

Bu xassələrin doğruluğu mühazirə 4-də verilən De-Morqan düsturlarından bilavasitə alınır.

Beləliklə, X çoxluğu üzərində topologiyanın verilməsi üçün açıq çoxluqlar ailəsi əvəzinə I',II',III' şərtlərini ödəyən çoxluqlar ailəsini təyin etmək və bu çoxluqları qapalı çoxluqlar adlandırmaq olar.

Topoloji fəzalarda metrik fəzalara aid olan bir sıra mühüm anlayışları daxil etmək mümkündür. X topoloji fəzasının x *nöqtəsinin ətrafı* bu nöqtəni özündə saxlayan ixtiyari açıq çoxluğa deyilir. Analogiyaya görə, Y alt çoxluğunu özündə saxlayan açıq çoxluq Y *çoxluğunun ətrafı* adlanır. $Y \subset X$ çoxluğunun *toxunma nöqtəsi* elə x nöqtəsinə deyilir ki, bu nöqtənin hər bir ətrafı Y çoxluğu ilə boş olmayan kəsişməyə malikdir. Y çoxluğunun bütün toxunma nöqtələri çoxluğu Y çoxluğunun *qapanması* adlanır və $\overline{Y}$ ilə işarə olunur. Y çoxluğu-nun *daxili nöqtəsi* elə $x \in Y$ nöqtəsinə deyilir ki, bu nöqtənin Y çoxluğuna daxil olan müəyyən ətrafı vardır. Y çoxluğunun bütün toxunma nöqtələri çoxluğu Y çoxluğunun *daxili hissəsi* adlanır və $IntY$ ilə işarə olunur.

Teorem 1. *$Y \subset X$ çoxluğu yalnız və yalnız $Y = \overline{Y}$ olduqda qapalıdır.*

İsbatı. Tutaq ki, $Y-$qapalı çoxluqdur, yəni $X \setminus Y-$açıq çoxluqdur. Onda $X \setminus Y$ çoxluğu özünün ixtiyari nöqtəsinin ətrafıdır, yəni $X \setminus Y$ çoxluğunun nöqtələri Y çoxluğunun toxunma nöqtələri olmurlar. Ona görə də $\overline{Y} \subset Y.$ Digər tərəfdən, $Y \subset \overline{Y}$ olması aşkardır. Beləliklə, $Y = \overline{Y}.$

Tərsinə, tutaq ki, $Y = \overline{Y}$. Bu o deməkdir ki, əgər $x \notin Y$ olarsa, onda x nöqtəsi Y çoxluğunun toxunma nöqtəsi deyil, yəni onun müəyyən U_x ətrafı

Y çoxluğu ilə kəsişmir: $U_x \subset X \setminus Y.$ Buradan alınır ki, $X \setminus Y$ çoxluğu U_x açıq çoxluqlarının birləşməsi şəklində göstərilə bilər:

$$X \setminus Y = \bigcup_{x \in X \setminus Y} U_x \,. \tag{1}$$

(1) bərabərliyindən II topologiya aksiomuna əsasən alırıq ki, $X \setminus Y$ - açıq çoxluqdur. ■

Teorem 2. *X topoloji fəzasının ixtiyari Y çoxluğunun $\overline{Y}$ qapanması qapalı çoxluqdur.*

İsbatı. Teorem 1-ə əsasən, $\overline{\overline{Y}} = \overline{Y}$ bərabərliyinin doğrulu-ğunu göstərmək yetərlidir. $\overline{Y} \subset \overline{\overline{Y}}$ olması aşkardır. $\overline{\overline{Y}} \subset \overline{Y}$ tərs daxil olmasının doğru olduğunu əsaslandıraq. Tutaq ki, $x \in \overline{\overline{Y}}.$ Bu o deməkdir ki, x nöqtəsinin ixtiyari U ətrafı $\overline{Y}$ çoxluğu ilə boş olmayan kəsişməyə malikdir: $U \cap \overline{Y} \neq \varnothing.$ Fərz edək ki, $y \in U \cap \overline{Y}$. Onda U çoxluğu y nöqtəsinin ətrafıdır. Digər tərəfdən, $y \in \overline{Y}$ olduğundan, U çoxluğu Y çoxluğu ilə boş olmayan kəsişməyə malikdir. Beləliklə, x nöqtəsi Y çoxluğunun toxunma nöqtəsidir, yəni $x \in \overline{Y}$. Buradan $\overline{\overline{Y}} \subset \overline{Y}$ daxil olması və
$\overline{Y} \subset \overline{\overline{Y}}$ şərti daxilində $\overline{\overline{Y}} = \overline{Y}$ bərabərliy■alınır.

Tutaq ki, bizə (X, τ) topoloji fəzası verilmişdir. Bu fəzanın açıq çoxluqlarının müəyyən $\mathrm{B} = \{U_\alpha\}, \alpha \in I$ ailəsinə baxaq. Əgər $\forall x \in X$ nöqtəsi və onun istənilən U_x ətrafı üçün elə $B_x \in \mathrm{B}$ çoxluğu vardırsa ki, $x \in B_x \subset U_x$ onda deyirlər ki, B ailəsi τ topologiyasının bazasıdır.

Teorem. $\mathrm{B} = \{U_\alpha\}, \alpha \in I$ ailəsinin τ topologiyasının bazası olması üçün zəruri və kafi şərt τ topologiyasından götürülən istənilən açıq çoxluğun B ailəsinin müəyyən çoxluqlarının birləşməsi şəklində göstərilməsidir.

Mühazirə 8

KOMPAKT TOPOLOJI FƏZALAR

1. Kompaktlıq xassəsi toroloji fəzaların ən mühüm xassələrindən biridir. Bu xassənin həqiqi ədədlərin və eləcə də kəsilməz funksiyaların tədqiqində fundamental rolunu qeyd etmək olar.

Əgər Hausdorf X topoloji fəzasının ixtiyari $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ açıq örtüyünün (bax, VIII mühazirə, bənd 3) sonlu $\{U_{\alpha_k}\}_{k=1}^N$ alt örtüyü vardırsa, onda deyirlər ki, X *-kompakt topoloji fəzadır*.

Nümunələrə baxaq.

1) İxtiyari antdiskret fəza kompaktdır.

2) İxtiyari sonlu topoloji fəza kompaktdır.

3) Sonlu sayda açıq çoxluqları olan ixtiyari topoloji fəza kompaktdır.

4) Sonsuz sayda nöqtələri olan diskret topoloji fəza koipakt deyil.

Tutaq ki, (X,τ) topoloji fəzasında $A\subset X$ alt çoxluğu verilmişdir. Əgər (A,τ_A) koipakt alt fəza olarsa, onda deyirlər ki, A *kompakt çoxluqdur.*

Teorem 1. *(X,τ) topoloji fəzasının A çoxluğunun kompakt olması üçün zəruri və kafi şərt onun X fəzasından olan açıq çoxluqlarla ixtiyari örtüyündən sonlu alt örtük seçməyin mümkün olmasıdır.*

İsbatı. Bu şərtin zəruriliyindən başlayaq. Tutaq ki, A çoxluğu kompaktdır, $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ isə onun X fəzasında açıq olan çoxluqlardan ibarət ixtiyari örtüyüdür: $A\subset\bigcup\limits_{\alpha\in I}U_\alpha, U_\alpha\subset\tau.$ $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ örtüyündən sonlu alt örtük ayıraq. Bundan ötrü U_α çoxluqlarının A çoxluğu ilə kəsişmələrinə baxaq: $V_\alpha=U_\alpha\bigcap A$ işarə edək. V_α çoxluqları A alt fəzasında açıqdırlar və aşkardır ki, onun örtüyünü əmələ gətirirlər: $A=A\bigcap\bigcup\limits_{\alpha\in I}U_\alpha=\bigcup\limits_{\alpha}V_\alpha$. A çoxluğu kompakt olduğundan, $\{V_\alpha\}_{\alpha\in I}$ örtüyündən müəyyən sonlu $\{V_{\alpha_k}\}_{k=1}^N$ örtüyünü seçə bilərik. Onda aşkardır ki, $\{U_{\alpha_k}\}_{k=1}^N-A$ çoxluğunun axtarılan alt örtüyüdür: $A=\bigcup\limits_{k=1}^N V_{\alpha_k}\subset\subset\bigcup\limits_{k=1}^N U_{\alpha_k}$.

Kafilik analoji qaydada isbat olunur. ■

Teorem 2. *Kompakt X fəzasının qapalı A alt çoxluğu kompaktdır.*

İsbatı. Göstərmək lazımdır ki, A çoxluğunun X fəzasın-dan olan açıq çoxluqlarla ixtiyari $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ örtüyündən sonlu alt örtük seçmək olar. Bundan ötrü $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ örtüyünü əmələ gətirən çoxluqlara $X\setminus A$ açıq çoxluğunu da qoşsaq, nəticədə bütün X fəzasının açıq örtüyünü alarıq. X fəzası kompakt olduğuna görə bu örtükdən sonlu alt örtük seçmək olar, belə ki, $X\setminus A$ çoxluğunun da bu alt örtüyə daxil olduğunu hesab etmək mümkündür. Tutaq ki,

$$X=\left(\bigcup_{k=1}^N U_{\alpha_k}\right)\bigcup(X\setminus A).$$

Aşkardır ki, $U_{\alpha_1},U_{\alpha_2},...,U_{\alpha_N}$ çoxluqları A çoxluğunun axtarı-lan sonlu alt örtüyünü əmələ gətirirlər. ■

Qeyd edək ki, çoxluğun kompaktlığından onun qapalılığı, ümumiyyətlə desək, alınmır. Aşağıdakı teorem doğrudur.

Teorem 3. *Hausdorf X fəzasında kompakt A çoxluğu qapalıdır.*

İsbatı. Göstərək ki, $X\setminus A$ tamamlayıcısı açıq çoxluqdur. Bundan ötrü $\forall x_0\in X\setminus A$ nöqtəsinin A çoxluğu ilə kəsişməyən ətrafının varlığını əsaslandırmalıyıq. X Hausdorf fəzası olduğun-dan, hər bir $x\in A$ nöqtəsinin x_0 nöqtəsinin müəyyən V_x ətrafı ilə kəsişməyən U_x ətrafı vardır. Bütün mümkün U_x ətrafları, aşkardır ki, A çoxluğunun açıq ətrafını əmələ gətirirlər: $A\subset\bigcup\limits_{x\in A}U_x$. A çoxluğu kompakt olduğundan, $\{U_x\}$ açıq örtüyünün müəyyən sonlu alt örtüyü vardır: $A\subset U_{x_1}\bigcup\cdots\bigcup U_{x_N}$, burada $x_1,...,x_N\in A.$ x_0 nöqtəsinin axtarılan ətrafı olaraq, $V_{x_1}\bigcap\cdots\bigcap V_{x_N}$ açıq çoxluğunu götürə bilərik; bu çoxluq nəinki A çoxluğu ilə, həm də

$U_{x_1} \cup \cdots \cup U_{x_N}$ çoxluğu ilə kəsişmir. Doğrudan da, tutaq ki, $x \in \bigcap_{k=1}^{N} V_{x_k}$ – ixtiyari nöqtədir. Bu nöqtə $V_{x_1}, \ldots, V_{x_N}$ çoxluqlarından hər birinə daxil olduğundan, $U_{x_1}, \ldots, U_{x_N}$ çoxluqlarından heç birinə daxil deyil. Deməli, x nöqtəsi bu çoxluqların birləşməsinə də daxil deyil. Buradan $X \setminus A$ çoxluğunun a[redacted]q olması, yaxud A çoxluğunun qapalı olması alınır.

Nəticə 1. *Metrik fəzada istənilən kompakt çoxluq qapalıdır.*

Doğrudan da, metrik fəzanın Hausdorf fəza olduğunu bilirik (bax, mühazirə 8, teorm 5-in isbatı). Buradan teorem 3-ə əsasən metrik fəzadakı hər bir kompakt çoxluğun qapalı olması alınır.

2. Kompakt fəzaların mühüm xassələrindən biri bu fəzaların normallığı ilə bağlıdır.

Teorem 4. *Kompakt topoloji fəza normaldır.*

İsbatı. Tutaq ki, X – kompakt fəzadır, F isə X – də qapalı çoxluqdur. Göstərək ki, əgər x nöqtəsi F çoxluğuna daxil deyildirsə, onda bir-biri ilə kəsişməyən $U(x)$ və $U(F)$ ətrafları vardır. $x \notin F$ olduğundan, ixtiyari $y \in F$ nöqtəsi üçün bir-biri ilə kəsişməyən $U_y \ni x$ və $V_y \ni y$ ətrafları vardır. Aşkardı r ki, $\{V_y\}$

ailəsi F çoxluğunu örtür. Teorem 3-ə görə $\{V_y\}$ örtüyünün $\{V_{y_k}\}_{k=1}^{N}$ sonlu alt örtüyü vardır. Ona görə də x nöqtəsinin $\bigcap_{k=1}^{N} U_{x_k}$ ətrafı $\bigcup_{k=1}^{N} V_{x_k} \supset A$ birləşməsi ilə kəsişmir.

İndi isə X fəzasında bir-biri ilə kəsişməyən qapalı F_1 və F_2 çoxluqlarına baxaq. Onda ixtiyari $x \in F_1$ nöqtəsi üçün bu nöqtənin və F_2 çoxluğunun bir-biri ilə kəsişməyən $U_x \ni x$ və $V_x \supset F_2$ ətrafları vardır. $\{U_x\}$ çoxluqlar ailəsi qapalı F_1 çoxluğunu örtür, ona görə də sonlu $\{U_{x_k}\}_{k=1}^{N}$ alt örtüyü vardır. Buradan aydın olur ki, $\bigcup_{k=1}^{N} U_{x_k}$ birləşməsi F_1 çoxluğunu özündə saxlayır və F_2 çoxluğunu özündə saxlayan $\bigcap_{k=1}^{N} V_{x_k}$ kəsişməsi ilə kəsişmir.

■

Kəsilməz inikas zamanı kompakt fəzanın obrazına dair aşağıdakı teorem doğrudur:

Teorem 5. *Kompakt fəzanın kəsilməz obrazı kompaktdır, yəni əgər $f : X \to Y$ – kəsilməz inikasdırsa və X fəzası kompakt-dırsa, onda $f(X)$ çoxluğu da kompaktdır.*

İsbatı. Əgər açıq $U_\alpha, \alpha \in I$ çoxluqları $f(X)$ çoxluğunu örtürlərsə, onda onların proobrazları olan $f^{-1}(U_\alpha)$ çoxluqları X fəzasını örtürlər. f kəsilməz inikas olduğundan, $\{f^{-1}(U_\alpha)\}$, $\alpha \in I$ örtüyü açıq örtükdür. Onda bu örtükdən sonlu alt örtük seçmək olar. Tutaq ki, $X = f^{-1}(U_{\alpha_1}) \cup \cdots \cup f^{-1}(U_{\alpha_N})$. Onda aşkardır ki, $f(X) \subset U_{\alpha_1} \cup \cdots \cup U_{\alpha_N}$ və $U_{\alpha_k}, k = 1, \ldots, N,$ çox-luqları $U_\alpha, \alpha \in I$ örtüyünün axtarılan sonlu alt örtüyünü əmələ gətirirlər.

Mühazirə 9

■

DİFRENSİALLANAN ÇOXOBRAZLI ANLAYIŞI, MİSALLAR

Tutaq ki hesabi bazası olan M hausdorf topoloji fəzası verilmişdir. Əgər M fəzasının hər bir nöqtəsinin R^n fəzasının oblastına homeomorf olan U ətrafı vardırsa, deyəcəyik ki, $M - n$-ölçülü çoxobrazlıdır. $\varphi : U \to \varphi(U) \subset R^n$ qeyd edilən homeomorfizm olduqda, (U, φ) cütü xəritə və ya lokal koor-dinat sistemi adlanır. Xəritə istənilən $x \in U$ nöqtəsinin

$$\varphi(x) = (u^1, \ldots, u^n)$$

koordinatlarını təyin etməyə imkan verir. Əgər xəritələrin hər bir cütünün kəsişməsində koordinatların

$$u^i = f^i\left(u^{1'},...,u^{n'}\right) \qquad (4.1)$$

çevrilməsini təyin edən keçid funksiyaları C^k sinfindən hamar funksiyalardırsa, deyəcəyik ki, M çoxobrazlısı C^k sinfindən diferensiallanandır (və ya hamardır).

Çoxobrazlı üzərində v vektoru $x \in (U,\varphi)$ nöqtəsində verilmiş xəritəyə nəzərən n sayda $\left(v^1,...,v^n\right)$ ədədlər sistemi ilə təyin olunur ki, bu ədədlər digər xəritəyə keçid zamanı vektor qanunu ilə çevrilirlər:

$$v^i = P^i_{i'}(x)v^{i'}, \quad P^i_{i'} = \left(\frac{\partial f^i}{\partial u^{i'}}\right)_x .$$

Verilmiş nöqtədə təyin olunan bütün vektorlar çoxluğu T_xM toxunan fəzasını əmələ gətirir. Vektorlara verilmiş nöqtənin ətrafında təyin olunmuş hamar funksiyalara

$$v(\varphi) = v^i\left(\partial_i\varphi\right)_x$$

qaydası ilə təsir edən (bax § 1) xətti diferensial operatorlar kimi baxılması məqsədəuyğundur. Hamar funksiyaların istənilən cütü üçün aşağıdakı xassələr doğrudur:

$$\begin{aligned} &\lambda,\mu \in R, \quad v(\lambda\varphi + \mu\psi) = \lambda v(\varphi) + \mu v(\psi), \\ &v(\varphi\psi) = v(\varphi)\psi + \varphi v(\psi). \end{aligned} \qquad (4.2)$$

Xüsusi halda, ∂_i vektorları xətti asılı olmayıb toxunan fəzanın təbii bazisini əmələ gətirirlər.

Tenzorlar cəbrinə analoji olaraq, təbii bazisi $\left\{du^i\right\}$ olan T^*_xM kotoxunan fəzasının elementləri kimi kovektorlar və x nöqtəsində ixtiyari tipli tenzorlar, həmçinin M çoxobrazlısı üzərində vektor, kovektor və tenzor meydanları təyin edilə bilər.

Əgər M hamar çoxobrazlısının hər bir xəritəsi üçün koordinatların dəyişməsi zamanı (3.4) qanunu üzrə çevrilən $\Gamma^i_{jk}(x)$-hamar funksiyaları$-\nabla$ rabitəsinin əmsalları yığımı veri-lərsə, deyəcəyik ki, M afin (və ya xətti) rabitəli fəzadır. Bu halda (M,∇) yazılışından istifadə olunur.

$$S^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} - \Gamma^i_{kj} \qquad (4.3)$$

funksiyaları buruqluq tenzoru adlandırılan (1,2) tipli tenzor meydanının komponentləridir.

Misal 1. § 3-də baxılan rabitə buruqsuz afin rabitədir və onunla xarakterizə olunur ki, dekart koordinatlarda əmsalları sıfra bərabərdir. Bu rabitəyə afin fəzanın kanonik rabitəsi deyilir.

Tutaq ki, $t-(M,\nabla)$ fəzası üzərində (p,q) tipli tenzor meydanıdır. $t-$nin mütləq diferensialı dedikdə (U,φ) xəritə-sində lokal olaraq

$$\nabla t = \left(\nabla t^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}\right) du^{j_1} \otimes \cdots \otimes du^{j_q} \otimes \partial_{i_1} \otimes \cdots \otimes \partial_{i_p} \qquad (4.4)$$

şəklində yazılan eyni tipli ∇t tenzor meydanı başa düşülür. ∇t tenzor meydanının koordinatları (3.13) düsturu ilə təyin olunurlar.

Tenzor meydanının $x \in M$ nöqtəsində v vektoru isti-qamətində kovariant törəməsi bu nöqtədə koordinatları

$$\nabla_v t^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q} = v^k \nabla_k t^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q} \qquad (4.5)$$

olan $\nabla_v t$ tenzoruna deyilir, burada $\nabla_k - (3.14)$ düsturu ilə təyin olunan operatordur.

Əgər $\gamma : I \to M-$lokal olaraq $u^i = u^i(\sigma)$ parametrik tənlikləri ilə verilən hamar əyridirsə, onda

$$\frac{\nabla t}{d\sigma} = \frac{du^k}{d\sigma}\nabla_k t \qquad (4.6)$$

t tenzor meydanının γ əyrisi boyunca kovariant törəməsi adla-nır. Analoji qayda ilə (M,∇) fəzası üzərində verilən vektor meydanı istiqamətində kovariant törəmə təyin edilə bilər. Xüsusi halda, təbii bazisin vektorları üçün

$$\nabla_{\partial_i}\partial_j = \Gamma_{ij}^k \partial_k. \qquad (4.7)$$

x nöqtəsində v_0 vektoru verildikdə əyrinin ixtiyari nöqtəsində bu vektora paralel olan $v(\sigma)$ vektorunun tapılması

$$\frac{dv^k}{d\sigma} + \Gamma_{ij}^k\left(u^s(\sigma)\right)\frac{du^i}{d\sigma}v^j = 0 \qquad (4.8)$$

adi diferensial tənliklər sisteminin inteqrallanmasına gətirilir (nəzərdə tutulur ki, γ əyrisi bir xəritənin təsir dairəsində yerləşir).

Məlum olduğu kimi, verilmiş başlanğıc şərtlər daxilində (4.8) sisteminin yeganə həlli var. Analoji qayda ilə əyri boyunca tenzorun paralel köçürülməsi təyin olunur.

(M,∇) afin rabitəli fəzasında verilmiş γ əyrisini götürək. Əgər γ əyrisinin müəyyən kanonik $u^i = u^i(s)$ para-metrizasiyasında τ toxunan vektoru onun özü boyunca paralel köçürülərsə, yəni

$$\frac{\nabla\tau}{ds} = 0$$

olarsa, deyəcəyik ki, γ geodezik xətdir. Aydındır ki, bu halda $u^i(s)$ funksiyaları aşağıdakı 2-ci tərtib adi diferensial tənliklər sistemini ödəməlidirlər:

$$\frac{d^2u^i}{ds^2} + \Gamma_{ij}^k\left(u^s\right)\frac{du^i}{ds}\frac{du^j}{ds} = 0. \qquad (4.9)$$

Misal 2. Tutaq ki, (M,∇)=A$^n -$ kanonik rabitəli afin fəzadır (bax misal 1). Hamar əyri boyunca vektorun paralel köçürülməsi ənənəvi qayda üzrə aparılır: onun dekart kompo-nentləri sabit olmalıdırlar. Doğrudan da, dekart koordinatlarda $\Gamma_{ij}^k = 0$ və vektorun (4.8) paralel köçürülməsi şərti $\frac{dv^i}{d\sigma} = 0$ şək-lində yazılır, buradan $v^i = const$ olması alınır. Kanonik rabitə-nin geodezik xətləri düz xətlərdir. Doğrudan da, dekart koor-dinatlarda (4.9) tənlikləri

$$\frac{d^2u^k}{ds^2} = 0$$

şəklində yazılır və buradan aşağıdakılar alınır:

$$u^k = a^k s + b^k, \quad a^k, b^k = const.$$

Mühazirə 10

Diferensiallanan çoxobrazlı üzərində toxunan və kotoxunan vektorlar

Tutaq ki, $M - n -$ölçülü hamar çoxobrazlı, I isə R ədəd oxunun açıq intervalıdır. Aşkardır ki, I açıq intervalı $R -$də açıq alt çoxobrazlı kimi bir ölçülü çoxobrazlıdır. Ona görə də $\gamma: I \to M$ inikasının hamarlığını çoxobrazlıların hamar inikası şəklində başa düşmək olar.

M çoxobrazlısı üzərində hamar əyri (və ya sadəcə əyri) $\gamma: I \to M$ hamar inikasına deyilir. Əgər $t_0 \in I$ üçün $\gamma(t_0) = P$ olarsa, onda deyirlər ki, əyri $t = t_0$ olduqda P nöqtəsindən keçir.

Əgər $(U,\varphi)-M$ çoxobrazlısı üzərində lokal xəritədirsə və $\gamma : I \to M$ əyrisi üçün $\gamma(I) \subset U$ olarsa, onda R^n fəzasının $\varphi(U)$ oblastında $\widetilde{\gamma} = \varphi \circ \gamma : I \to \varphi(U)$ əyrisinə γ əyrisinin (U,φ) xəritəsinin lokal koordinatlarında verilməsi deyilir.

(U,φ) lokal xəritəsinin verilməsi ilə $P \in U$ nöqtəsindən keçən hər bir hamar γ əyrisinə $\widetilde{\gamma} : I_\varepsilon \to \varphi(U)$ əyrisinin t_0 nöqtəsində sürət vektoru olan

$$\frac{d\widetilde{\gamma}(t_0)}{dt} = \left\{ \frac{du^1(t_0)}{dt}, \ldots, \frac{du^n(t_0)}{dt} \right\}$$

vektorunu qarşı qoymaq olur, burada $I_\varepsilon =]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[, \varepsilon > 0.$

M çoxobrazlısı üzərində P nöqtəsindən keçən iki hamar əyri üçün bu əyrilərə yuxarıdakı qaydada qarşı qoyulan vektorlar üst-üstə düşürlərsə, onda deyirlər ki, verilən hamar əyrilər P nöqtəsində bir-birinə toxunurlar.

M çoxobrazlısı üzərində P nöqtəsində bir-birinə toxunan hamar əyrilərin ekvivalentlik sinfinə P nöqtəsində M çoxobrazlısına toxunan vektor deyilir.

P nöqtəsində M çoxobrazlısına toxunan vektorlar çoxluğu $T_P M$ kimi işarə olunur. $T_P M$ $n-$ölçülü vektorlar fəzasıdır və P nöqtəsində M çoxobrazlısına toxunan fəza adlanır.

R^n fəzasının $e_1, \ldots, e_n$ kanonik bazisinə $T_P M$ toxunan fəzasında uyğun gələn bazisi hərəkətli bazis adlandırırlar və $\partial_{1P}, \ldots, \partial_{nP}$ kimi işarə edirlər.

Mühazirə 11

Diferensiallanan çoxobrazlı üzərində tenzor meydanları

Tutaq ki, $V-K$ meydanı üzərində vektor fəzadır və A- $A, B, C, \ldots$ elementlərinə malik olan çoxluqdur. A çoxluğunun elementlərini nöqtələr adlandıraq. Əgər hər bir nizamlanmış $(A,B) \in$ A$\times$A elementlər cütünə aşağıdakı şərtlərin ödənilməsi ilə $v = \overrightarrow{AB} \in V$ vektorunu qarşı qoyan A$\times$A $\to V$ inikası verilərsə, deyəcəyik ki, A$-K$ meydanı üzərində afin fəzadır:

1) İstənilən $A \in$ A nöqtəsi və istənilən $v \in V$ vektoru üçün elə yeganə $B \in$ A nöqtəsi vardır ki, $v = \overrightarrow{AB}.$

2) İstənilən $A, B, C \in$ A nöqtələri üçün Şall münasibəti doğrudur:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = 0.$$

$\dim V = n$ olduqda afin fəza $n-$ölçülü qəbul olunur və A^n kimi işarə edilir. $V -$ A^n afin fəzası üçün yönəldici vektor fəza adlandırılır.

İxtiyari qaydada seçilmiş $O \in$ A nöqtəsini qeyd edək. Bu halda $\forall A \in$ A nöqtəsi üçün bu nöqtənin radius-vektoru adlandı-rılan $x = \overrightarrow{OA}$ vektoru birqiymətli təyin olunur. $V -$də $\{e_i\}$ bazi-sini seçməklə $x = x^i e_i$ ayrılışını alarıq. x^i ədədlərinə $A(x)$ nöqtə-sinin $\{O, e_i\}$ reperində afin (və ya dekart) koordinatları deyilir.

V yönəldici vektor fəzası psevdo-Evklid vektor fəzası ol-duqda A – afin-psevdo-Evklid (və ya psevdo-Evklid) fəzası adlandırılır.

A^n afin fəzasının nöqtəsində T_x toxunan fəzası başlanğı-cı bu nöqtədə olan bütün vektorların əmələ gətirdiyi eyni ölçülü
vektor fəzadır. Müxtəlif nöqtələrdəki toxunan fəzalar öz araların-da paralel köçürmə vasitəsilə təbii olaraq eyniləşdirilə bilər.

$U \in$ A^n oblastını nəzərdən keçirək. Əgər U oblastının hər bir nöqtəsinə bu nöqtədəki toxunan fəzada (p, q) tipli tenzoru qarşı qoyan $x \to t_x$ inikası verilərsə, deyəcəyik ki, U oblastın-da (p, q) tipli t tenzor meydanı verilmişdir. Başqa sözlə, bu hal-da arqumentləri T_x və T_x^* fəzalarından olan və həm də nöqtənin seçimindən asılı olan polixətti funksiyaya baxılır. Məsələn, $p = 1,$
$q = 2$ olduqda $t_x(\xi, u, v)$ polixətti funksiyası təyin olunur. Əgər $\{O, e_i\} -$ A^n-də dekart reperdirsə, onda

$$t_x = t^i_{jk}\left(x^1, ..., x^n\right)\xi_i u^j v^k . \qquad (1.1)$$

U oblastında verilmiş $t^i_{jk}(x)$ funksiyalarına tenzor meydanının koordinatları deyilir. Əgər $t^i_{jk}(x)$ funksiyaları C^k sinfindən olan hamar funksiyalardırsa, deyəcəyik ki, $t - C^k$ sinfindən olan ha-mar tenzor meydanıdır. $t^i_{jk} = const$ olduqda , tenzor meydanı sabit tenzor meydanı adlanır.

Tenzorlar üzərində aparılan əməllər təbii olaraq nöqtələr üzrə aparılmaqla tenzor meydanlarına tətbiq edilir. Məsələn, eyni tipli t və s tenzorları üçün toplama əməli

$$(t+s)_x = t_x + s_x$$

şəklində aparılır.

Tenzor meydanları üzərində yeni bir əməl- diferensialla-ma əməli də aparılır. Polixətti funksiyanın diferensialını hesabla-dıqda nəzərə almaq lazımdır ki, dekart reperi halında vektor və kovektor arqumentlərinin koordinatları nöqtənin seçimindən asılı deyil. Məsələn, (1,1) tenzoru üçün

$$dt = dt^i_{jk}(x)\xi_i u^j v^k \, . \qquad (1.2)$$

Beləliklə, $dt - (1,2)$ tipli tenzor meydanıdır, dt^i_{jk} diferensialları onun dekart reperə nəzərən koordinatlarıdır.

Misal 1. A^n-də nöqtələrin radius-vektorlarının meydanı-na baxaq. Dekart reperə nəzərən $x = x^i e_i$ ayrılışını yaza bilərik. Diferensiallamaqla, koordinatları $dx^i = e^i(dx)$ olan $dx = dx^i e_i$ vektor meydanını alarıq.

Diferensialların aşağıdakı xassələri doğrudur:

a) Tenzor meydanının diferensialının sıfra bərabər olması üçün zəruri və kafi şərt onun sabit olmasıdır (istənilən dekart reperdə $t^i_{jk} = const$ olmasıdır);

b) Tenzor meydanlarının cəminin diferensialı onların dife-rensialları cəminə bərabərdir: $d(t+s) = dt + ds.$

c) Tenzor hasilinin diferensialı Leybnis qaydası ilə hesab-lanır: $d(t \otimes s) = dt \otimes s + t \otimes ds.$ Əgər xüsusi halda, $t-$ədəddirsə, onda $d(ts) = tds.$

d) Bükülmə əməli diferensiallama əməli ilə yerini dəyişə bilər:

$$tr^k_m(dt) = d(tr^k_m t).$$

Tenzor meydanının koordinatlarının diferensiallarını xü-susi törəmələrlə ifadə etməklə alarıq:

$$dt = \partial_s t^i_{jk} \xi_i u^j v^k dx^s, \qquad \partial_s t^i_{jk} = \frac{\partial t^i_{jk}}{\partial x^s}. \qquad (1.3)$$

Misal 1-i nəzərə almaqla belə bir nəticəyə gəlirik ki, $\partial_s t^i_{jk}$ funksi-yaları (1,3) tipli tenzor meydanının koordinatlarıdır. Bu tenzor meydanı t tenzor meydanının törəməsi adlanır və ∂t kimi işarə olunur. Ümumi halda (p,q) tipli tenzor meydanının törəməsi $(p,q+1)$ tipli tenzor meydanıdır. Törəməni verilmiş $w = w^i(x)e_i$ vektor meydanı ilə diferensiallama indeksi üzrə bükməklə yeni-dən (p,q) tipli

$$\partial_w t = tr_1^1(w \otimes \partial t) \qquad (1.4)$$

tenzor meydanını alarıq. $\partial_w t - w$ vektor meydanı istiqaməti üzrə törəmə adlanır. Məsələn, $\partial_w t^i_{jk} = w^s \partial_s t^i_{jk}$.

<u>Misal 2</u>. Tutaq ki, $\varphi(x^1,...,x^n) - U \subset$ A^n oblastında təyin olunmuş skalyar meydandır. Onda $\partial_s \varphi - grad\varphi$ kimi işarə olu-nan və φ meydanının qradiyenti adlandırılan kovektor meydanı-nın koordinatlarıdır. Əgər yönəldici vektor fəza psevdo-Evklid fəzasıdırsa, onda indeksi qaldırmaqla, koordinatları ilə aşağıdakı kimi ifadə olunan vektor meydanını alarıq:

$$grad\varphi = (g^{ij}\partial_j \varphi)e_i.$$

φ potensial funksiya, $grad\varphi$ isə potensial vektor meydanı adlanır. İstiqamət üzrə törəmə skalyar hasilin köməyi ilə ifadə oluna bilər:

$$\partial_w \varphi = w^i(x)\partial_i \varphi = g(w, grad\varphi).$$

<u>Misal 3</u>. Tutaq ki, $\xi -$kovektor meydanıdır. $\partial\xi$ törəmə-sinin alternasiyasını aparaq və nəticəni 2-yə vuraq:

$$rot\xi = 2 \cdot Al(\partial\xi).$$

$rot\xi -$koordinatları $S_{ij} = \partial_i \xi_j - \partial_j \xi_i$ olan tenzor meydanıdır və ξ kovektor meydanının rotasiyası adlanır.

Misal 4. Tutaq ki, $v-$vektor meydanıdır. Onun törəməsi koordinatları $\partial_j v^i$ olan $(1,1)$ tipli tenzor meydanıdır. Bu tenzor meydanının $tr(\partial v)$ izi $v-$nin divergensiyası adlandırılan invari-antdır. Psevdo-Evklid fəzada divergensiyanı

$$div\, v = \partial_i v^i = g^{ij}\partial_i v_j$$

şəklində yaza bilərik. Bu invariant sıfra bərabər olduqda $v-$ solenoidal vektor meydanı adlanır.

Tutaq ki, $v - U \subset$ A^n oblastında təyin olunmuş vektor meydanıdır. $v-$nin inteqral xətləri (və ya trayektoriyaları) dedikdə toxunan vektorları meydanın vektorları ilə üst-üstə dü-şən, yəni $\frac{dx}{dt} = v(x(t))$ münasibətini ödəyən $x = x(t)$ parametri-zasiya olunmuş əyriləri başa düşülür. Bu münasibəti koordinat-larla yazmaqla,

$$\frac{dx^i}{dt} = v^i\left(x^1(t),...,x^n(t)\right) \tag{1.5}$$

adi diferensial tənliklər sistemini alarıq. (1.5) sisteminin inteq-rallanması inteqral xətlərini təyin etməyə imkan verir.

Mühazirə 12

XARİCİ DİFERENSİAL FORMALAR. XARİCİ DİFERENSİALLAMA

Afin fəzanın $U \subset$ A^n oblastında xarici diferensial $p-$ forma dedikdə U oblastında təyin olunmuş p dərəcəli xarici formaların $\omega_x(v_1,...,v_p)$ meydanı başa düşülür. Koordinatlarda

$$\omega = \sum_{*}\omega_{i_1\cdots i_p}(x)e^{i_1}\Lambda\cdots\Lambda e^{i_p}$$

və ya T_x^*A fəzasında bazis kovektorlarını dx^i kimi işarə etmək qəbul olunduğundan

$$\omega = \sum_{*}\omega_{i_1\cdots i_p}(x)dx^{i_1}\Lambda\cdots\Lambda dx^{i_p} \tag{2.1}$$

yazılışı doğrudur.

Xüsusi halda, skalyar meydana sıfır dərəcəli forma kimi baxılmalıdır. $\omega = \omega_i(x)dx^i$ xarici diferensial 1-formasına (yəni kovektor meydanına) Pfaf forması da deyilir. Xarici formalar üzərində aparılan bütün əməllər təbii olaraq afin fəzada xarici diferensial formalara tətbiq olunur və bu əməllər nöqtələr üzrə aparılır.

Xarici diferensial formalar üzərində yeni bir əməl-xarici diferensiallama aparılır. Xarici diferensiallama xarici $p-$forma-ya $(p+1)-$formanı qarşı qoyan elə $d:\omega\to d\omega$ inikasına deyi-lir ki:

a) $d-K$ -xətti inikasdır:

$$d(\lambda\omega+\mu\theta)=\lambda d\omega+\mu d\theta;$$

b) φ funksiyası üçün $d\varphi$ xarici diferensialı adi difensialla üst-üstə düşür;

c) Əgər $\omega-p-$forma, $\theta-q-$formadırsa, onda

$$d(\omega\Lambda\theta)=d\omega\Lambda\theta+(-1)^p\omega\Lambda d\theta;$$

d) İstənilən ω forması üçün

$$d^2\omega=0.$$

Bu xassələr xarici diferensiallamanı bütünlüklə xarakterizə edir. Tərifdən aydın olur ki, lokal şəkildə, yəni koordinatlarda

$$d\omega=\sum_{*}d\omega_{i_1\cdots i_p}(x)dx^{i_1}\Lambda\cdots\Lambda dx^{i_p}.$$

$d\omega=0$ olduqda ω qapalı xarici diferensial forma adlanır. Əgər $\omega=d\theta$ şərtini ödəyən θ xarici forması vardırsa, deyəcəyik ki, ω dəqiq xarici diferensial formadır. d) xassəsi onu göstərir ki, istənilən dəqiq diferensial forma qapalıdır.

Misal 1. A^2 müstəvisi üzərində verilmiş

$$\omega=P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$

xətti diferensial forması üçün yaza bilərik:

$$d\omega=dP\Lambda dx+dQ\Lambda dy=\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\Lambda dy.$$

$d\omega-$dərəcəsi 2 olan xarici diferensial formadır. Aydındır ki, $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$ olduqda ω qapalı formadır.

Misal 2. Tutaq ki, $\omega-3$-ölçülü psevdo-Evklid fəzada xarici 2-formadır:

$$\omega=\omega_{12}dx^1\Lambda dx^2+\omega_{13}dx^1\Lambda dx^3+\omega_{23}dx^2\Lambda dx^3.$$

Xarici diferensiallamaqla alarıq:

$$d\omega=(\partial_3\omega_{12}-\partial_2\omega_{13}+\partial_1\omega_{23})dx^1\Lambda dx^2\Lambda dx^3.$$

Mühazirə 13

Riman çoxobrazlısı

Tutaq ki, $M-$hamar çoxobrazlıdır və M üzərində simmetrik bixətti formalar meydanı verilmişdir, yəni hər bir $P\in M$ nöqtəsi üçün T_PM toxunan fəzasında simmetrik bixətti $s_P:T_PM\times T_PM\to R$ forması verilmişdir. Bu meydanı s ilə işarə edək.

M üzərində (U,φ) lokal xəritəsi üçün hərəkətli bazisin $\partial_1,...,\partial_n$ vektor meydanlarını təyin edirik.

M üzərində s simmetrik bixətti formalar meydanının (U,φ) lokal xəritəsinə nəzərən komponentləri U üzərində

$$s_{ij} = s(\partial_i, \partial_j), 1 \le i, j \le n$$

şəklində təyin olunmuş funksiyalardır.

Əgər s simmetrik bixətti formalar meydanının M üzərində istənilən (U, φ) lokal xəritəsinə nəzərən komponentləri U üzərində hamar funksiyalardırsa, onda deyirlər ki, s meydanı hamardır.

M hamar çoxobrazlısı üzərində Riman metrikası dedikdə hər bir $P \in M$ nöqtəsinə $g_P : T_P M \times T \times M \to R$ skalyar hasilini qarşı qoyan müsbət-müəyyən simmetrik bixətti formaların hamar g meydanı başa düşülür. (M, g) cütünə Riman çoxobrazlısı deyilir.

M Riman çoxobrazlısı üzərində istənilən (U, φ) lokal xəritəsinə nəzərən g Riman metrikasının komponentləri $g_{ij} = g(\partial_i, \partial_j)$ şəklində təyin olunurlar.

Tutaq ki, $\gamma : I \to M - M$ çoxobrazlısı üzərində hamar əyridir. Onda hər bir $t \in I$ üçün bu əyri $T_\gamma(t)$ toxunan vektorunu təyin edir. Nəticədə γ əyrisinin toxunan vektor meydanı adlanan $T_\gamma : t \to T_\gamma(t) \in T_{\gamma(t)} M$ inikası təyin olunur.

M Riman çoxobrazlısı üzərində istənilən hamar $\gamma : I \to M$ əyrisi üçün hər bir $t-$yə $T_\gamma(t)$ toxunan vektorunun uzunluğunun kvadratını qarşı qoyan

$$I \to R : t \to g_{\gamma(t)}(T_\gamma(t), T_\gamma(t))$$

funksiyasını təyin etmək mümkündür.

M Riman çoxobrazlısı üzərində γ hamar xəttinin t_1, t_2 nöqtələri arasında qalan qövsünün uzunluğu

$$l_{t_1}^{t_2}(\gamma) = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g_{\gamma(t)}(T_\gamma(t), T_\gamma(t))}\,dt \qquad (1)$$

düsturu ilə hesablanır.

Əgər γ əyrisinin $\gamma(I)$ obrazı (U, φ) lokal xəritəsinin oblastında yerləşərsə, onda (1) düsturunu

$$l_{t_1}^{t_2}(\gamma) = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\tilde{g}_{ij}(u^1(t), ..., u^n(t)) \frac{du^i(t)}{dt} \frac{du^j(t)}{dt}}\,dt$$

şəklində yazmaq olar, burada $\tilde{g}_{ij} = g_{ij} \circ \varphi^{-1}$ işarə olunmuşdur.

Mühazirə 14

Çoxobrazlı üzərində afin rabitə, rabitə əmsalları, onların çevrilmə qanunu

Hamar çoxobrazlı üzərində təyin olunan əsas diferensial – həndəsi strukturlardan biri də afin rabitədir. M çoxobrazlısı üzərində afin rabitə aşağıdakı şərtləri ödəyən

$$\nabla : X(M) \times X(M) \to X(M)$$

inikasına deyilir:

1) $\forall V, U \in X(M)$ üçün

$$\nabla(U, V) = \nabla_U V \in X(M);$$

2) $\forall V, U \in X(M)$, $\forall f \in F(M)$ üçün

$$\nabla f_U V = f \nabla_U V ,$$

burada $F(M) - M$ çoxobrazlısı üzərində hamar funksiyalar çoxluğudur;

3) $\forall V, U \in X(M)$, $\forall g \in FM$ üçün

$$\nabla_V (gU) = g\nabla_V U + U \mathscr{V}(g),$$

burada $\mathscr{V}(g) = \frac{\partial g}{\partial x^i} \mathscr{V}^i - g$ funksiyasının V vektor meydanı boyunca törəməsidir.

U, V vektor meydanlarını ∂_i və ∂_j bazis vektor meydanları ilə əvəz edək və $\nabla_{\partial_i} \partial_j$ vektor meydanını $\{\partial_k\}$, $k = 1,2,...,n$ bazisi ayıraq:

$$\nabla_{\partial_i} \partial_j = \Gamma_{ij}^k \partial_k .$$

(1)

1) – 3) şərtlərindən istifadə edərək, göstərmək olur ki, (1) bərabərliyinin sağ

tərəfindəki ayrılış əmsalları tenzor qanunu ilə deyil, aşağıdakı qaydada dəyişirlər:

$$\Gamma_{ij'}^{k'} = \left(\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k}\right)\left(\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\right)\left(\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\right)\Gamma_{ij}^k + \left(\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k}\right)\left(\frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{i'}\partial x^{j'}}\right).$$

Bundan ötrü $x',\ldots,x^n$ lokal koordinantlarından $x^{1'}, x^{2'},\ldots,x^{n'}$ lokal koordinantlarına

$$x^{i'} = x^{i'}\left(x^1, x^2,\ldots,x^n\right)$$

keçid düsturlarına baxaq. Yəni $x^{1'},\ldots,x^{n'}$ lokal koordinant sistemində

$$\nabla_{\partial_{i'}}\partial_{j'} = \Gamma_{i'j'}^{k'}\partial_{k'}$$

ayrılışını yaza bilərik.

$\partial_{k'} = \dfrac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\,\partial_k$ olduğundan,

$$\nabla_{\partial_{i'}}\partial_{j'} = \Gamma_{i'j'}^{k'}\partial_{k'} = \Gamma_{i'j'}^{k'}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\,\partial_k.$$

Digər tərəfdən,

$\partial_{i'} = \dfrac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\,\partial_i$, $\partial_{j'} = \dfrac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\,\partial_j$ olduğuna görə, ∇ afin rabitəsinin tərifinə əsasən yaza bilərik:

$$\nabla_{\partial_{i'}}\partial_{j'} = \nabla_{\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\partial_i}\left(\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\,\partial_j\right) = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\nabla_{\partial_i}\left(\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\,\partial_j\right) = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\left(\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\,\nabla_{\partial_i}\partial_j + \partial_i\left(\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\right)\partial_j\right) =$$

$$= \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\nabla_{\partial_i\partial_j} + \partial_{i'}\left(\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\right)\partial_j = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\Gamma_{ij}^k\partial_k + \frac{\partial^2 x^j}{\partial x^{i'}\partial x^{j'}}\,\partial_j =$$

$$= \left(\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\Gamma_{ij}^k + \frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{i'}\partial x^{j'}}\right)\partial_k.$$

Beləliklə,

$$\Gamma_{i'j'}^{k'}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\partial_k = \left(\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\Gamma_{ij}^k + \frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{i'}\partial x^{j'}}\right)\partial_k,$$

və ya

$$\Gamma_{i'j'}^{k'}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\Gamma_{ij}^k + \frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{i'}\partial x^{j'}}$$

Bu bərabərliyin hər iki tərəfini $\left(\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\right)$ keçid matrisinin tərs matrisinin $\frac{\partial x^{e'}}{\partial x^k}$ komponentlərinə vuraq:

$$\Gamma^{k'}_{i'j'}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\frac{\partial x^{e'}}{\partial x^k}=\Gamma^{k}_{i'j'}\delta^{e'}_{k'}=\Gamma^{e'}_{i'j'}=\frac{\partial x^{e'}}{\partial x^k}\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\Gamma^k_{ij}+\frac{\partial x^{e'}}{\partial x^k}\frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{i'}\partial x^{j'}} ,$$

və ya

$$\Gamma^{k'}_{i'j'}=\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k}\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\Gamma^k_{ij}+\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k}\frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{i'}\partial x^{j'}} .$$

Γ^k_{ij} əmsalları ∇ afin rabitəsinin əmsalları adlanır. Rabitə əmsalları $\nabla_{\mathscr{V}}U$ vektor meydanının ifadəsini təyin etməyə imkan verir:

$$\nabla_{\mathscr{V}}U=\mathscr{V}^i\left(\partial_i U^k+\Gamma^k_{ij}U^j\right)\partial_j=\mathscr{V}^i\left(\nabla_i U^k\right)\partial_k .$$

$\nabla_i U^k=\left(\partial_i U^k+\Gamma^k_{ij}U^j\right)$ ifadəsi U vektor meydanının ∇ afin rabitəsində kovariant törəməsi adlanır . Analoji qayda ilə ixtiyari α kovektor meydanının, həmçinin M çoxobrazlısı üzərində verilmiş ixtiyari (p,q) tipli t tenzor meydanının kovariant törəməsini hesablamaq olar:

$$\nabla_i\alpha_i=\partial_j\alpha_i-\Gamma^k_{ij}\alpha_k ,$$

$$\nabla_k t^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}=\partial_k t^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}-\Gamma^m_{k_{j_1}}t^{i_1\dots i_p}_{m\dots j_q}-\dots-\Gamma^m_{k_{j_q}}t^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots m}+\Gamma^{i_1}_{k_m}t^{m\dots i_p}_{j_1\dots j_q}+\dots+\Gamma^{i_p}_{k_m}t^{i_1\dots m}_{j_1\dots j_q} .$$

Mühazirə 15

KOVARİANT TÖRƏMƏ VƏ MÜTLƏQ DİFERENSİALLAMA

A^n afin fəzasında $\left(x^i\right)$ dekart koordinatları ilə yanaşı $\left(u^i\right)$ əyrixətli koordinatlarından istifadə etmək daha əlverişlidir. Əyrixətli koordinatlar afin fəzanın müəyyən $U\subset A^n$ oblastında verilmiş və $\varphi:U\to R^n$ homeomorfizmini təyin edən n sayda $u^i=u^i\left(x^1,\dots,x^n\right)$ funksiyaları vasitəsilə daxil edilirlər. Bu halda deyirlər ki, A^n-də (U,φ) xəritəsi və ya koordinat sistemi verilmişdir.Tərs inikas $x^i=x^i(u^1,\dots,u^n)$ funksiyaları ilə və ya

$$x\left(u^1,\dots,u^n\right)=x^i\left(u^1,\dots,u^n\right)e_i \qquad (3.1)$$

vektor-funksiyası ilə təyin olunur. (3.1) vektor funksiyasının C^2 sinfindən diferensiallanmasını nəzərdə tuturuq.

Əgər U oblastında birindən başqa qalan bütün əyrixətli koordinatları qeyd etsək, nəticədə bir arqumentin

$$x\left(u^1_0,\dots,u^k,\dots,u^n_0\right)$$

vektor-funksiyasını alarıq. Bu vektor-funksiya U oblastında $k-$cı koordinat xəttini təyin edir. Hər bir nöqtədə koordinat xətlərinin $\partial_k = (\partial_k x^i)e_i$ toxunan vektorları xətti asılı olmayan vektorlardır və $\|\partial_k x^i\|$ Yakobi matrisinin qeyri-məxsusiliyinə əsasən x nöqtəsi ilə bərabər $\{x, \partial_k\}$ təbii və ya natural reperini əmələ gətirirlər.

Tutaq ki, A^n xəritələr sistemi ilə örtülmüşdür. Onda istənilən xəritələr cütünün təyin oblastlarının $U \cap U'$ kəsiş-məsində koordinatların

$$u^i = f^i(u^{1'}, ..., u^{n'})$$

çevrilməsi yaranmış olur, burada $f = \varphi \circ \varphi'^{-1} = \{f^1, ..., f^n\}$-qeyri-məxsusi $P = \|P^i_{i'}\|$, $P^i_{i'} = \partial_{i'} u^i$ Yakobi matrisinə malik di-ferensiallanan funksiyalardır.

x nöqtəsinin sonsuz kiçik yerdəyişməsi zamanı təbii bazisin vektorları da dəyişirlər. Bu dəyişikliklər $dx, d\partial_k$ diferen-sialları ilə xarakterizə olunurlar. Qeyd olunan diferensialları $\{x, \partial_i\}$ reperinin vektorları üzrə ayıraq:

$$dx = du^i \partial_i, \quad d\partial_k = \omega^i_k \partial_i. \tag{3.2}$$

(3.2) münasibətləri reperin hərəkət tənlikləri adlanır. $\omega^i_k(u^1, ..., u^r, du^1, ..., du^n)-$ diferensialların xətti formalarıdır və rabitə formaları adlanırlar:

$$\omega^i_k(dx) = \Gamma^i_{jk}(u^1, ..., u^n)du^j. \tag{3.3}$$

Γ^i_{jk} funksiyalarına isə rabitə əmsalları deyilir. Rabitə əmsalları aşağı indekslərinə görə simmetrik olub, əyrixətli koordinatların çevrilməsi zamanı

$$\Gamma^{i'}_{j'k'} = P^{i'}_i \left(\Gamma^i_{jk} P^j_{j'} P^k_{k'} + \partial_{j'} P^i_{k'}\right) \tag{3.4}$$

qanunu üzrə dəyişirlər. Dekart koordinatlar onunla xarakterizə olunurlar ki, bu koordinatlarda $\Gamma^i_{jk} = 0.$

Psevdo-Evklid fəzası halında metrik tenzorun $g_{ij}(u^1, ..., u^n) = g(\partial_i, \partial_j)$ komponentlərini hesablamaq olar. Ra-bitə əmsalları bu komponentlərlə aşağıdakı düstur üzrə ifadə olunur və Kristoffel simvolları adlandırılırlar:

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} g^{is}\left(\partial_j g_{ks} + \partial_k g_{js} - \partial_s g_{jk}\right). \tag{3.5}$$

Misal 1. E^2 Evklid müstəvisi üzərində (x^1, x^2) dekart koordinatları ilə yanaşı, $x^1 = rCos\varphi$, $x^2 = rSin\varphi$ münasibət-ləri ilə polyar koordinatları daxil edək. Yakobyanı hesablayaq: $J = \dfrac{\partial(x^1, x^2)}{\partial(r, \varphi)} = r$. Bu isə o deməkdir ki, polyar koordinatlar

$r > 0$ şərti daxilində $U = E^2 \setminus \{0,0\}$ oblastında təyin olunmuş-lar. Beləliklə, $J = 0$ şərtinin ödənildiyi $r = 0$ polyusu polyar koordinat sisteminin yeganə məxsusi nöqtəsidir. Koordinat şəbə-kəsi $r = c_1$ konsentrik çevrələrindən və $\varphi = c_2$ şüalarından təşkil olunmuşdur. (r, φ) nöqtəsində təbii reperin vektorları $\partial_1 = e(\varphi)$, $\partial_2 = rg(\varphi)$ vektorlarıdır. Rabitə əmsallarını hesab-layaq. $d\partial_k$ diferensiallarını təyin etməklə, alarıq:

$$d\partial_1 = g(\varphi)d\varphi, \quad d\partial_2 = g(\varphi)dr - re(\varphi)d\varphi.$$

Ona görə də reperin hərəkət tənlikləri

$$d\partial_1 = \frac{d\varphi}{r}\partial_2, \quad d\partial_2 = -rd\varphi\partial_1 + \frac{dr}{r}\partial_2$$

şəklindədirlər. Buradan aydın olur ki, polyar koordinat sistemində rabitə formaları üçün

$$\|\omega^i_k\| = \begin{bmatrix} 0 & -rd\varphi \\ \dfrac{d\varphi}{r} & \dfrac{dr}{r} \end{bmatrix} \tag{3.6}$$

yazılışı doğrudur və sıfırdan fərqli rabitə əmsalları aşağıdakı-lardır:

$$\Gamma_{22}^{1} = -r, \quad \Gamma_{12}^{2} = \Gamma_{21}^{2} = \frac{1}{r}.$$

Tutaq ki, (u^i) əyrixətli koordinatları daxil edilən afin fəzanın $U \subset \mathrm{A}^n$ oblastında hamar v vektor meydanı verilmiş-dir. v vektor meydanını $T_x \mathrm{A}^n$ toxunan fəzasının $\{\partial_i\}$ təbii bazisi üzrə ayıraq: $v = v^i(x)\partial_i$. Reperin (3.2) hərəkət tənliklərini nəzərə alaraq, v vektor meydanının diferensialını hesablayaq:

$$dv = (dv^i + \omega_k^i v^k)\partial_i. \qquad (3.7)$$

Beləliklə, dv vektor meydanı

$$\nabla v^i = dv^i + \omega_k^i v^k \qquad (3.8)$$

koordinatlarına malikdir, başqa sözlə, $dv = (\nabla v^i)\partial_i$.

∇ diferensial operatoruna mütləq diferensial deyilir. Xü-susi halda, dekart koordinatlarda $\omega_j^i = 0$ olduğundan mütləq diferensial adi diferensialla üst-üstə düşür.

ξ kovektor meydanı halına baxaq. ξ meydanını $T_x^* \mathrm{A}^n$ kotoxunan fəzanın bazisini təşkil edən və $du^i(\partial_j) = \delta_j^i$ qoşma-lıq şərtini ödəyən təbii $\{du^i\}$ koreperi üzrə ayıraq. Nəticədə $\xi = \xi_i(x)du^i$ xətti diferensial formasını alarıq. Diferensialı he-sablayaraq, koreperin (3.2) tənliklərinə ikili olan

$$d(du^i) = -\omega_k^i du^k \qquad (3.9)$$

hərəkət tənliklərini nəzərə alsaq, yaza bilərik:

$$d\xi = (d\xi_i - \xi_k \omega_i^k)du^i. \qquad (3.10)$$

$$\nabla \xi_i = d\xi_i - \xi_k \omega_i^k \qquad (3.11)$$

funksiyaları $d\xi$ kovektor meydanının koordinatlarıdır. Bura-dan aydın olur ki, ixtiyari tipli tenzorun dt diferensialı aşağıdakı ayrılışa malikdir:

$$dt = \left(\nabla t_{j_1 \cdots j_q}^{i_1 \cdots i_p}\right) du^{j_1} \otimes \cdots \otimes du^{j_q} \otimes \partial_{i_1} \otimes \cdots \otimes \partial_{i_p}, \qquad (3.12)$$

burada mütləq diferensial

$$\nabla t_{j_1 \cdots j_q}^{i_1 \cdots i_p} = dt_{j_1 \cdots j_q}^{i_1 \cdots i_p} + \sum_{a=1}^{p} t_{j_1 \cdots j_q}^{i_1 \cdots m \cdots i_p} \omega_m^{i_p} - \sum_{b=1}^{q} t_{j_1 \cdots m \cdots j_q}^{i_1 \cdots i_p} \omega_{j_b}^m \qquad (3.13)$$

ifadəsinə malikdir.

<u>Misal 2.</u> Tutaq ki, $v-$müstəvi üzərində vektor meydanı-dır. Polyar koordinatları seçək. Onda rabitə formalarının (3.6) ifadəsini nəzərə alaraq, (3.8) düsturundan dv meydanının koor-dinatları üçün yaza bilərik:

$$\nabla v^1 = dv^1 - rv^2 d\varphi, \quad \nabla v^2 = dv^2 + \frac{1}{r}\left(v^1 d\varphi + v^2 dr\right).$$

(3.13) bərabərliyinin sağ tərəfində $dt_{j_1 \cdots j_q}^{i_1 \cdots i_p}$ və ω_j^i xətti formalarını təbii koreperlə ifadə edək:

$$dt_{j_1 \cdots j_q}^{i_1 \cdots i_p} = \partial_k t_{j_1 \cdots j_q}^{i_1 \cdots i_p} du^k, \qquad \omega_j^i = \Gamma_{kj}^i du^k.$$

Nəticədə

$$dt = \nabla_k t_{j_1 \cdots j_q}^{i_1 \cdots i_p} du^k \otimes du^{j_1} \otimes \cdots \otimes du^{j_q} \otimes \partial_{i_1} \otimes \cdots \otimes \partial_{i_p}$$

olduğunu alarıq, burada

$$\nabla_k t^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q} = \partial_k t^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q} + \sum_{a=1}^{p} t^{i_1\cdots m\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}\Gamma^{i_a}_{km} - \\ - \sum_{b=1}^{q} t^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots m\cdots j_q}\Gamma^{m}_{kj_b} \tag{3.14}$$

tenzor meydanının ∂t törəməsinin koordinatlarıdır.
(3.14) operatoruna kovariant törəmə operatoru deyilir. ∂t törəməsini verilmiş w vektor meydanı ilə bükməklə koordinat-ları

$$\nabla_w t^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q} = w^k \nabla_k t^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}$$

olan istiqamət üzrə törəməni alarıq.
Diferensiallanan M çoxobrazlısı, bu çoxobraxlı üzərində hamar metrik tenzor meydanı, yəni $(0,2)$ tipli simmetrik və qeyri-məxsusi g tenzor meydanı verildikdə psevdo-Riman fəzası adlanır və (M,g) kimi işarə olunur. Bu fəzanın hər bir nöqtəsinin T_xM toxunan fəzası psevdo-Evklid fəzasıdır. Nəzər-də tutulur ki,

$$ds^2 = g_{ij}(x)du^i du^j \tag{5.1}$$

diferensial kvadratik formasının siqnaturası baxılan oblastda sabitdir, burada $g_{ij}(x) = g(\partial_i, \partial_j) - g$ tenzorunun təbii reperə nəzərən komponentləridir. Əgər (5.1) forması müsbət-müəyyən olarsa, deyəcəyik ki, (M,g) Riman çoxobrazlısıdır. Bu halda T_xM Evklid fəzası olur.

(M,g) çoxobrazlısı üzərində aşağıdakı iki şərti ödəyən yeganə ∇ rabitəsi vardır:

1) bu rabitənin buruqluğu sıfra bərabərdir: $S = 0$;
2) bu rabitədə metrik tenzor kovariant sabitdir: $\forall v$ vek-tor meydanı üçün

$$\nabla_v g = 0.$$

Yuxarıdakı qayda ilə təyin olunan ∇ rabitəsinə Riman rabitəsi deyilir. Riman rabitəsinin komponentləri təbii reperə nəzərən

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} g^{ks}\left(\partial_i g_{js} + \partial_j g_{is} - \partial_s g_{ij}\right) \tag{5.2}$$

düsturu ilə ifadə olunurlar, yəni Kristoffel simvollarıdır (bax § 3, (3.5) düsturu).

Metrik tenzorun varlığı psevdo-Evklid fəzasında olduğu kimi, vektor və kovektor meydanları arasında biyektiv uyğunluq yaratmağa imkan verir. Bu uyğunluq koordinatlarla indeksin endirilməsi və qaldırılması şəklində ifadə olunur:

$$v_i = g_{ij}v^j, \quad v^i = g^{ij}v_j. \tag{5.3}$$

Məhz bu səbəbdən vektor meydanının rotasiyasından və kovektor meydanının divergensiyasından danışmaq olar:

$$(rot\ v)_{ij} = 2g_{k[j}\nabla_{i]}v^k, \\ div\ v = g^{ij}\nabla_i v_j. \tag{5.4}$$

İndekslərin endirilməsi və qaldırılması əməlləri istənilən tipli tenzor meydanlarına tətbiq oluna bilər.

Metrik tenzorun kovariant sabitliyinə əsasən, vektorların skalyar hasili paralel köçürmə zamanı saxlanılır. Başqa sözlə, paralel köçürmə zamanı toxunan fəzaların

$$\tau : T_xM \to T_{x(t)}M$$

xətti izomorfizmi izometriyadır.

(M,g) fəzasında geodezik xətlər izotrop və qeyri-izotrop ola bilər. Hər iki halda geodezik xəttin tənliyini

$$\frac{d^2u^k}{ds^2} + \Gamma^k_{ij}\left(u^m(s)\right)\frac{du^i}{ds}\frac{du^j}{ds} = 0 \tag{5.5}$$

şəklində yazmaq olar, burada s – kanonik parametrdir.

Bir sıra hallarda çoxobrazlı üzərində $\{\partial_i\}$ təbii reperinə deyil, hər bir nöqtədə xətti asılı olmayan n sayda $e_i(x)$ vektor meydanlarından təşkil olunmuş daha ümumi növ reperə baxılması zərurəti yaranır. Belə reperlərə qeyri-holonom reperlər deyilir.

$$[e_i, e_j] = R^k_{ij}(x)e_k \qquad (5.6)$$

qəbul edərək, qeyri-holonom reperin struktur tənliyini alarıq. R^k_{ij} – qeyri-holonomluq obyekti adlanır. Qeyd edək ki, qeyri-holonomluq obyekti tenzor deyildir. Qoşma $\{e^i(x)\}: e^i(e_j) = \delta^i_j$ kореperi

$$de^k = -\frac{1}{2}R^k_{ij}e^i \Lambda e^j \qquad (5.7)$$

struktur tənliklərini ödəyir.

$$\nabla_{e_i} e_j = \Gamma^k_{ij} e_k \qquad (5.8)$$

qəbul etməklə, qeyri-holonom reperdə rabitə əmsallarını alarıq. Bu halda kovariant törəmə

$$\nabla_i v^k = e_i(v^k) + \Gamma^k_{ij} v^j \qquad (5.9)$$

şəklində yazılır və buruqluq tenzoru

$$S^k_{ij} = 2\Gamma^k_{[ij]} - R^k_{ij} \qquad (5.10)$$

ifadəsinə malik olur.

(M, g) psevdo-Riman fəzası halında buruqluq sıfra bəra-bərdir, lakin bu heç də $\Gamma^k_{[ij]} = \frac{1}{2}R^k_{ij}$ rabitə əmsallarının simmet-rikliyini göstərmir. Metrik tenzorun kovariant törəməsinin sabit-liyindən alınır ki,

$$\Gamma_{kij} = \frac{1}{2}\left(e_i\left(g_{jk}\right) + e_j\left(g_{ik}\right) - e_k\left(g_{ij}\right)\right) + \frac{1}{2}\left(R_{kij} + R_{jki} - R_{ijk}\right), \qquad (5.11)$$

burada $\Gamma_{kij} = g_{ks}\Gamma^s_{ij}, \quad R_{kij} = g_{ks}R^s_{ij}.$

(5.11) düsturu (5.2) düsturunun ümumiləşməsidir. (M, g) fəza-sında daha çox ortonormallaşmış qeyri-holonom reperlərdən istifadə olunur: $g(e_i, e_j) = 0, \quad i \neq j, \quad g(e_i, e_i) = \pm 1.$ Bu halda metrika

$$ds^2 = \left(e^1\right)^2 + \cdots + \left(e^p\right)^2 - \cdots - \left(e^n\right)^2$$

şəklinə gətirilir və (5.11) düsturuna əsasən rabitə əmsalları üçün

$$\Gamma_{kij} = \frac{1}{2}\left(R_{kij} + R_{jki} - R_{ijk}\right) \qquad (5.12)$$

ifadəsi doğru olur.